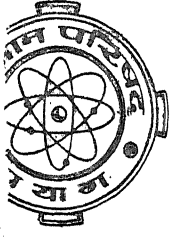
ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका

Vol. 38 January 1995 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टैक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

बिजली उत्पादन स्रोत तथा पर्यावरण प्रदूषण

मैं विज्ञान परिषद् का अत्यन्त आभारी हूँ कि स्वर्गीय डा० आत्माराम जैसे अन्तर्राष्ट्रीय ख्याति-प्राप्त वज्ञानिक एवं इस देश के वैज्ञानिक अनुसन्धान कार्यक्रमों के निर्धारण में अत्यन्त महत्वपूर्ण भूमिका निभाने वाले महान वैज्ञानिक की स्मृति में आरम्भ की गई इस वार्तामाला में मुझे भाग लेने का यह अवसर प्रदान किया। मुझे इस अवसर पर इसलिये और भी गर्व हो रहा है कि इस वार्तामाला में मुझसे पहले के वक्ता भी अन्तर्राष्ट्रीय ख्यातिप्राप्त महान वैज्ञानिक रहे हैं। मैं विशेष रूप से पिछली वार्ता के वार्ताकार डॉ० रामचरण मेहरोत्रा का उल्लेख करना चाहूँगा जो मेरे गुरु हैं और उससे भी अधिक प्रेरणा-स्रोत हैं। अत: मैं अपनी वार्ता उन्हीं डॉ० राम के चरणों में भेंट करना चाहूँगा।

प्रस्तावना

मानव जब पृथ्वी पर प्रकट हुआ तो उसे सबसे पहली आवश्यकता खाना तथा जल की तो महसूस हुई ही परन्तु शीत से बचने के लिए ताप रूप में ऊर्जा की भी हुई। उसने पत्थरों को रगड़ कर चिनगारी से सूखे पत्तों में आग जलाकर इस आवश्यकता की पूर्ति की। यही शायद उसका पहला वैज्ञानिक आविष्कार भी रहा होगा। जैसे-जैसे मानव आगे बढ़ा, ऊर्जा एवं शक्ति की आवश्यकता को उसने अधिकाधिक महसूस किया एवं उनका उपासक बना।

आरम्भ में उसकी ऊर्जा और शक्ति की आवश्यकताएँ रोटी, कपड़ा और मकान तक ही सीमित थीं और इनकी पूर्ति के लिए प्रकृति ने हमें पर्याप्त साधन पेड़, पौधों और जंगलों के रूप में दिये थे। जनसंख्या की वृद्धि भी धीरे-धीरे हुई और हम यह मानने लगे कि प्राकृतिक स्रोत असीमित हैं। हम इनका कितना भी उपयोग करें इन स्रोतों पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ेगा।

विकास के उपर्युक्त क्रम में जब उसने कोयले और उसके बाद खनिज तेल एवं प्राकृतिक गैस की खोज कर ली तो उसे और भी विश्वास हो गया कि इन असीमित स्रोतों के रहते हमें चिन्ता का कोई कारण नहीं है। यद्यपि अन्य प्राणियों की आवश्यकताएँ तो बहुत नहीं बढ़ीं परन्तु मनुष्य की आवश्यकताओं का तो लगता है कि कोई अन्त ही नहीं है। ये निरन्तर बढ़ती ही जा रही हैं। आवश्यकताओं के

82वें विज्ञान कांग्रेस के अवसर पर कलकत्ता में दिया गया डा० आत्माराम स्मृति व्याख्यान।

साथ-साथ जनसंख्या में ही वृद्धि इतनी तेजी से होने लगी कि 20वीं शताब्दी में प्रवेश करने पर उसे लगा कि इन आवश्यकताओं की पूर्ति तेजी से बढ़ती उनकी संख्या को देखते हुए केवल बड़े-बड़े उद्योग स्थापित करके ही की जा सकती है और इसी से इस शताब्दी के आरम्भ से औद्योगीकरण का युग आरम्भ हुआ। अब अन्तिम दशक में आते-आते हमें भलीभाँति यह अहसास हो गया है कि प्राकृतिक स्रोत असीमित नहीं हैं औरउनके अत्यधिक उपयोग से हम प्राकृतिक सन्तुलन को बहुत तेजी से बिगाड़ रहे हैं। यदि हमने शीघ्र ही इस सन्दर्भ में कारगर कदम न उठाए तो हम आगे आने वाली पीढ़ियों के लिए बहुत निराशा-जनक भविष्य छोड़ जायेंगे जिसके लिए वे शायद ही माफ कर सकें।

ऊर्जा के रूप

ऊर्जा हमें ताप, प्रकाश, ध्वनि, चुम्बकत्व, बिजली और यांत्रिक रूपों में मिल सकती है। सिद्धान्त रूप में हम इसे एक रूप से दूसरे रूप में परिवर्तित भी कर सकते हैं परन्तु एक तो प्रत्येक रूप परिवर्तन में ऊर्जा का व्यय अनुपयोगी रूप में होता है और सभी कार्य अधिकांश रूपों द्वारा नहीं किए जा सकते हैं। इस प्रकार हमने पाया कि ऊर्जा के सर्वव्यापक प्रयोग सबसे आसानी और अधिक क्षमता से बिजली द्वारा सम्भव हैं। इसके बाद ताप एवं प्रकाश आते हैं। बड़े उद्योगों को चलाने के लिए तो हमें आज बिजली का कोई अधिक सक्षम पर्याय नहीं दिखाई देता है। यही कारण है कि आज किसी देश के विकास के स्तर का मानदण्ड भी प्रतिव्यक्ति वार्षिक आय की ही भाँति प्रतिव्यक्ति ऊर्जा की खपत हो गया है। दुर्भाग्य की बात यह है कि स्वतन्त्रता-प्राप्ति के पश्चात् हुए अत्यधिक तेजी से विकास एवं औद्योगीकरण के बावजूद भी आज हम संसार के पिछड़े देशों के करीब ही आते हैं। बढ़ती जनसंख्या की आवश्यकताओं और विकसित देशों की श्रेणी में आने के लिए हमें अपने बिजली उत्पादन में बहुत तेजी से वृद्धि करनी होगी। ऐसा करते समय यह आवश्यक है कि हम इस बात का भी ध्यान रखें कि पर्यावरण पर इनके कुप्रभाव कम से कम हों और प्रकृति के स्रोतों का उपयोग ऐसे सन्तुलित ढंग से हो कि हम स्रोतों को अधिक समय तक इस्तेमाल कर सकें। इस बीच यह आशा रखें कि नए स्रोतों की खोज हो सकेगी तथा बिजली उत्पन्न करने के वैकल्पिक स्रोतों का विकास हो सकेगा—जैसे कि परमाणु संलयन एवं सौर ऊर्जा जैसे निरन्तर और असीमित स्रोत।

बिजली उत्पादन के पारम्परिक स्रोत

उद्योगों के संचालन के लिए विशेष रूप से हमें ऐसे बिजलीघरों का निर्माण करना होता है जो बड़ी मात्रा में निरन्तर ऊर्जा प्रदान कर सकें। ऐसे बिजलीघरों का निर्माण जिन स्रोतों से आज सम्भव है वे हैं जल, खनिज तेल, कोयला एवं गैस तथा परमाणु विखंडन पर आधारित बिजलीघर। जल विद्युत वहीं उत्पन्न करना सम्भव होता है जहाँ जल की बड़ी मात्रा को निरन्तर ऊँचाई से गिरा कर विद्युत उत्पन्न करने वाले संयंत्रों को चलाया जा सके। अतः ऐसे बिजलीघर हर जगह बनाना सम्भव नहीं। जहाँ सम्भव हो सके वहाँ ऐसे बिजलीघर आर्थिक एवं पर्यावरण प्रदूषण की दृष्टि से सबसे आकर्षक विकल्प हैं। इस प्रकार के स्रोत अधिकांशतः इस देश के पूर्वोत्तरीय क्षेत्र में उपलब्ध हैं परन्तु वहाँ बिजली की आवश्यकता उतनी अधिक मात्रा में नहीं है। अन्य स्थानों पर इनका अधिक से अधिक उपयोग किया

जा चुका है या योजनाएँ चल रही हैं। खनिज तेल एवं गैस के सीमित भंडारों का ही अब तक पता चला है और इनकी आवश्यकता यातायात एवं रासायनिक उद्योगों (जैसे खाद आदि में) कच्चे माल के रूप में अधिक है और कम से कम निकट भविष्य में ऐसा ही करना राष्ट्र-हित में होगा। यदि नये और बड़े भंडारों का पता इस बीच चल जाए तो बात दूसरी होगी।

कोयला सबसे अधिक मात्रा में उपलब्ध है और इसीलिए इसका सर्वाधिक उपयोग किया जा रहा है (लगभग 60% बिजली इसी स्रोत से प्राप्त हो रही है) और निकट भविष्य में भी यही हमारा प्रमुख स्रोत रहेगा। यद्यपि अभी मात्र 3-4 प्रतिशत बिजली परमाणु बिजलीघरों में बनाते हैं परन्तु पर्यावरण कुप्रभावों की दृष्टि से एवं अन्य आकर्षक स्रोतों (तेल एवं गैस) के अभाव में यह विशेष रूप से आकर्षक विकल्प हो जाता है। आइये, अब इन सभी पारम्परिक स्रोतों का पर्यावरण प्रदूषण की दृष्टि से तुलनात्मक अध्ययन करें। ऐसा करते समय हमें यह सदैव ध्यान में रखना चाहिए कि हमारी योजना दूसरे देशों से भिन्न हो सकती है। यदि दूसरे देशों में किसी स्रोत का विरोध है तो उसके क्या कारण हैं? क्या उन्हें बिजली की उतनी ही आवश्यकता है जितनी भारत की और उन्हें अन्य स्रोत आसानी से और पर्याप्त मात्रा में तो उपलब्ध नहीं हैं? यह भी हो सकता है कि आर्थिक सम्पन्नता के कारण सभी स्रोत उन्हें समान रूप से उपलब्ध हों अतः वे केवल पर्यावरण प्रदूषण क्षमता के आधार पर सबसे स्वच्छ स्रोत को प्राथमिकता दे रहे हैं।

विभिन्न स्रोतों का पर्यावरण पर कुप्रभाव

पर्यावरण पर मानव कृत्यों के कुप्रभाव दो प्रकार से होते हैं—एक तो पारिस्थितिकी में अवांछित परिवर्तन और दूसरे उनसे उत्पन्न प्रदूषकों द्वारा। किसी क्षेत्र की पारिस्थितिकी वहाँ के जंगल, जीव-जन्तु तथा अन्य प्राकृतिक सम्पदा द्वारा निश्चित होती है। यदि इसमें बहुत परिवर्तन आये तो उसके कुप्रभाव पेड़-पौधों, जीव-जन्तुओं आदि का सन्तुलन तो बिगाड़ते ही हैं उस क्षेत्र की जलवायु, भूगर्भीय जल आदि की मात्रा पर भी बुरा प्रभाव डालते हैं। प्रदूषकों (गैसीय, कणिकीय एवं जल में हानिकारक तत्वों की मात्रा) के कुप्रभाव तो सर्वविदित हैं अतः अब हम एक दृष्टि विभिन्न स्रोतों के कुप्रभावों पर डालते हैं।

जल-विद्युत : इस प्रकार के बिजलीघरों का निर्माण प्रायः बहु-उद्देश्यीय योजनायें होती हैं जिनसे सिंचाई के लिए जल तथा बिजली प्राप्त होती है। प्रदूषकों की दृष्टि से यह सबसे स्वच्छ स्रोत है परन्तु पारिस्थितिकी पर पड़ने वाले कुप्रभावों की दृष्टि से सबसे हानिकारक भी है। इसके लिए बड़ी संख्या में जंगलों को काटना होता है, जीव-जन्तुओं को तथा अनेक गाँवों में रहने वालों को विस्थापित करना होता है, बड़े बाँध बनाने होते हैं जिनमें अपार जल के भंडारन के कारण भूकम्पों की सम्भावना भी बढ़ती है। यद्यपि इनकी उपयोगिता बहुत अधिक है अतः इन्हें बनाना ही होगा परन्तु सन्तुलन को बनाये रखने के लिए बहुत बड़ी योजनाओं के स्थान पर अनेक छोटी-छोटी योजनाओं को क्रियान्वित किया जाये तो कुप्रभावों को कम किया जा सकता है। आर्थिक दृष्टि से बड़ी योजनाएँ अधिक आकर्षक होती हैं परन्तु इसमें समझौते करने होंगे और बड़ी-बड़ी नदियों पर एक बड़े बाँध (जैसे भाखड़ा-नंगल,

हीराकुंड, टेहरी, नर्मदा आदि) के स्थान पर कई छोटे बाँध बनाये जाएँ तो जनता का विरोध भी कम होगा और पारिस्थितिकी में हानि कम होगी ।

तापीय बिजली : तापीय बिजलीघर कोयला, तेल या गैस द्वारा चलाये जाते हैं । इन जैविक ईंधनों का प्रयोग पानी को भाप बनाने में किया जाता है । भाप से बिजली के जेनरेटर घुमाए जाते हैं । तीनों स्रोतों के प्रयोग से कई गैसीय प्रदूषक—जैसे सल्फर, नाइट्रोजन और कार्बन के आक्साइड उत्पन्न होते हैं जो पर्यावरण में प्रवेश करते हैं । इनकी मात्रा सबसे अधिक कोयले से, उससे कम तेल से और सबसे कम गैस के प्रयोग से उत्पन्न होती है । इनके अतिरिक्त कोयले के प्रयोग से कणिकीय पदार्थों की बहुत अधिक मात्रा भी उत्पन्न होती है और जले हुए कोयले की राख स्वयं में एक प्रदूषक है । इन सबसे अधिक चिन्ता का विषय इन ईंधनों के जलाने से उत्पन्न कार्बन डाइ आक्साइड गैस है जो 'ग्रीन हाउस गैस' है तथा इससे पादप गृह प्रक्रिया द्वारा भविष्य में अपरिवर्तनीय कुप्रभावों की आशंका है । उच्च तकनीकी यन्त्रों के उपयोग से गैसीय तथा कणिकीय प्रदूषकों की पर्यावरण में जाने वाली मात्रा को तो कम किया जा सकता है परन्तु 'पादप गृह गैस' कार्बन डाइ आक्साइड को कम करना अभी सम्भव नहीं हो पा रहा है । भारत में कोयले के पर्याप्त स्रोत तो हैं परन्तु इनमें से अधिकांश बहुत कम तापीय क्षमता वाले और बहुत अधिक राख उत्पन्न करने वाले हैं (40-50 प्रतिशत तक) जबकि अन्य देशों में 3-4 प्रतिशत राख उत्पन्न करने वाले कोयले का प्रयोग प्राय: किया जाता है और प्रदूषक नियन्त्रण के आधुनिकतम उपकरणों का प्रयोग किया जाता है ।

परमाणु बिजली : परमाणु बिजलीघर पर्यावरण एवं पारिस्थितिकी के कुप्रभावों की दृष्टि से सबसे आकर्षक विकल्प है । ये बिजली उत्पन्न करने में तो तापीय बिजलीघरों जैसे ही हैं परन्तु भाप बनाने के लिए परमाणु विखंडन की भौतिक प्रक्रिया का प्रयोग करते हैं । इस प्रक्रिया में यूरेनियम को प्लूटोनियम तत्वों के परमाणुओं में न्यूट्रान नामक कणिकों द्वारा दो या अधिक भागों में परमाणु भट्टी में तोड़ा जाता है । इस प्रक्रिया में उत्पन्न अत्यधिक ऊर्जा का प्रयोग पानी को भाप बनाने में किया जाता है । ऐसे बिजलीघर न तो पादपगृह गैस कार्बन डाइ आक्साइड उत्पन्न करते हैं न ही कोई रासायनिक प्रदूषक (गैसीय या कणिकीय), वे कम जगह घेरते हैं और कम ईंधन से चलते हैं । इनमें केवल कुछ रेडियोसक्रिय पदार्थ उत्पन्न होते हैं जिन्हें नियन्त्रित रूप से इतनी सीमित मात्रा में पर्यावरण में भेजा जाता है जहाँ इनका जीव-जन्तुओं, पेड़-पौधों या मनुष्य पर कोई कुप्रभाव न पड़ सके । यदि हम कुछ तुलनात्मक आँकड़े लें तो इसे आसानी से समझ सकते हैं ।

1000 मेगावाट के कोयला तथा परमाणु बिजली घरों के तुलनात्मक आँकडे

	परमाणु बिजलीघर	कोयला चलित बिजलीघर
ईंधन	125 टन/वर्ष	250000 टन/वर्ष
ईंधन लाने के लिए यातायात	15 ट्रक/वर्ष	2500 ट्रेन/वर्ष
अपशिष्ट	अधिकांश का पुनर्संसाधन	500000 टन राख 5000000 टन कार्बन डाइ आक्साइड
	केवल 15 घन मीटर आयतन का रेडियोसक्रिय अपशिष्ट	200000 टन सल्फर के आक्साइड 30000 टन नाइट्रोजन के आक्साइड 10 टन सीसा, पारा, आर्सेनिक आदि

उपर्युक्त आँकड़ों से स्पष्ट है कि परमाणु बिजलीघर पर्यावरण प्रदूषण की दृष्टि से अत्यन्त आकर्षक हैं। परमाणु बिजलीघरों के सन्दर्भ में भारत ने ईंधन से लेकर अपशिष्ट प्रबन्धन तक के सभी चरणों में आत्म-निर्भरता प्राप्त कर ली है तथा ऐसे 9 बिजलीघर कार्य भी कर रहे हैं तथा अन्य कई निर्माणाधीन भी हैं। परमाणु बिजलीघरों में अति उन्नत तकनीकी का प्रयोग होता है और इनकी आरम्भिक लागत भी कुछ क्षेत्रों में, यदि वे कोयला खानों के निकट हैं तो कोयला चालित बिजलीघरों से कुछ अधिक हो सकती है। परन्तु पर्यावरण तथा देश में उपलब्ध स्रोतों को ध्यान में रखते हुए इस स्रोत के अधिकाधिक प्रयोग में लाने की आवश्यकता है। ऐसे बिजलीघरों में रेडियोसक्रिय पदार्थों के होने के प्रति आम व्यक्तियों में कुछ भ्रान्तियाँ हैं जिन्हें रूस के चर्नोबिल रिएक्टर में 1986 में हुई दुर्घटना से और बल मिला है परन्तु न तो भारतीय बिजलीघरों में ऐसी दुर्घटना की सम्भावना ही है और यदि कोई छोटी-मोटी घटना घटती भी है तो उससे निपटने की पूर्ण जानकारी और साधन हमें उपलब्ध हैं।

अपारम्परिक स्रोतों का महत्व

अपारम्परिक स्रोतों में सौर ऊर्जा, भूगर्भीय ऊर्जा, जैविक गैस, ज्वार भाटा तथा वायु द्वारा चलने वाले बिजली उत्पादक संयंत्र आते हैं। ये बिजली उत्पादन के आकर्षक विकल्प हैं। समस्या यह है कि उद्योगों के लिए आवश्यक बड़ी मात्रा एवं अविरत पूर्ति इनमें से किसी से अभी सम्भव नहीं है। इनमें से कुछ स्रोत तो इस देश में नहीं के बराबर ही उपलब्ध हैं—जैसे भूगर्भीय, ज्वार आदि और कुछ बहुत सीमित क्षेत्र में ही पाये जाते हैं—जैसे वायु सबसे व्यापक रूप में और पर्याप्त मात्रा में सौर ऊर्जा एवं जैविक गैस ही पाये जाते हैं। यह उन क्षेत्रों के लिए बहुत आदर्श स्रोत हैं जहाँ माँग कम है और निरन्तर उपलब्धि अनिवार्य नहीं है—जैसे पर्वतीय एवं अन्य सुदूर क्षेत्र तथा कृषि के लिए सभी जगह। सौर ऊर्जा का प्रयोग ताप और बिजली दोनों के ही रूप में किया जाता है—जैसे होटलों आदि में गरम पानी देने के लिए तथा सौर पैनेल द्वारा बिजली के रूप में। एक बार सौर पैनेल बन गये तो यह उतना ही स्वच्छ स्रोत है जितना जल-विद्युत परन्तु सौर पैनेल बनाने में कई प्रदूषक पर्यावरण में पहुँचते हैं। ये अभी बहुत मँहगे भी हैं अतः प्रति मेगावाट बिजली की आरम्भिक लागत पारम्परिक स्रोतों की अपेक्षा बहुत अधिक आती है। इनके बावजूद सौर ऊर्जा का उपयोग दिनोंदिन बढ़ रहा है परन्तु पारम्परिक स्रोतों की तुलना में अभी यह नगण्य ही है। यदि सौर पैनेल की लागत काफी कम हो सके तो उद्योगों के अतिरिक्त सभी अन्य कार्यों के लिए यह सबसे आकर्षक स्रोत सिद्ध हो सकता है।

इस देश में जानवरों की संख्या बहुत अधिक है अतः उनके अपशिष्ट एवं अनेक पेड़ पौधों के स्रोत के रूप में प्रयोग से जैविक गैस (जिसे गोबर गैस भी कहते हैं) बनाई जाती है। इस गैस का प्रयोग ईंधन के रूप में किया जाता है तथा इससे बिजली भी उत्पन्न की जाती है। उद्योगों के अलावा अन्य कार्यों में इसके प्रयोग में वृद्धि भी हो रही है और भविष्य में इससे गाँवों के लिए बिजली एवं ऊर्जा प्राप्ति की अच्छी सम्भावनाएँ हैं। अन्य अपारम्परिक स्रोत जैसे वायु एवं ज्वार भाटा कुछ ही क्षेत्रों तक सीमि त हैं और भविष्य में भी राष्ट्रीय स्तर पर इनका योगदान अधिक होने की सम्भावना कम ही है।

उपसंहार

बिजली की बढ़ती माँग को पूरा करने के लिए हमें सभी उपलब्ध स्रोतों का सहारा लेना होगा परन्तु इनमें प्रमुख कोयला ही रहेगा। अधिकांश मानव कृत्यों का परिणाम पर्यावरण प्रदूषण और प्राकृतिक स्रोतों का अभाव उत्पन्न कर रहा है। यद्यपि हम इसे रोक नहीं सकते परन्तु इसकी दर को सुनियोजित कार्यक्रम द्वारा धीमी अवश्य कर सकते हैं। अभी तक इन योजनाओं का आधार आर्थिक आँकड़े, विदेशी मुद्रा की आवश्यकता एवं योजनाकाल होते थे परन्तु तीव्रता से हो रहे पर्यावरण पर कुप्रभावों को देखते हुए अब आवश्यक हो गया है कि पर्यावरण कुप्रभावों को भी उतनी ही महत्ता दी जाए जितनी आर्थिक आँकड़ों को। परमाणु बिजलीघर एक आकर्षक विकल्प है और यद्यपि अभी हमने इसका बहुत कम उपयोग किया है परन्तु इसका अधिकाधिक उपयोग हमें बिजली की कमी को पूरा करने में सहायक तो हो ही सकता है। पर्यावरण प्रदूषण की दृष्टि से यह बहुत आकर्षक विकल्प है। इसका हमें लाभ उठाना चाहिए। जल विद्युत को छोड़ कर यह सबसे कम प्रदूषणकारी स्रोत है। यदि हम जल विद्युत से जुड़ी पारिस्थितिकी में अत्यधिक कुप्रभावों को भी ध्यान में रखें तो परमाणु बिजलीघर सबसे आकर्षक विकल्प है। हर देश की अपनी समस्यायें हैं और उसी के अनुरूप उसकी योजनाएँ बनती हैं। तेल और प्राकृतिक गैस के अभाव और परमाणु ऊर्जा के क्षेत्र में भारत द्वारा पूरे ईंधन-चक्र के हर पहलू में दक्षता प्राप्त होने के कारण हमारे लिए यह बहुत आकर्षक विकल्प है। अन्य स्रोतों के उपयोग में भी हमें पर्यावरण प्रदूषण को न्यूनतम करने के लिए हर सम्भव प्रयोग करना चाहिए तभी हम आने वाली पीढ़ी के प्रति अपनी जिम्मेदारी पूरी कर सकेंगे।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

$\bar{H}$ फलन के लिए एक व्यापक संकलन सूत्र

मुकेश एम० जोशी तथा ए० के० राठी
गणित विभाग, डूँगर स्वायत्त शासी महाविद्यालय
बीकानेर (राज०)

[प्राप्त—अप्रैल 1, 1994]

साराश

इस प्रपत्र का उद्देश्य $\bar{H}$ फलन के लिए एक व्यापक संकलन सूत्र स्थापित करना है । प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें देवडा[3] के कई ज्ञात फल विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं ।

Abstract

A general summation formula for the $\bar{H}$-function. *By* Mukesh M. Joshi and A. K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar Autonomous College, Bikaner (Raj.).

The object of this paper is to establish a general summation formula for $\bar{H}$-function. On appropriately specializing the parameters we get many known results of Devra[3] as particular cases.

1. भूमिका

बहुचर्चित फाक्स[4] एवं ब्राक्समा[1] के H फलन का सार्वीकरण हाल ही में इनायत हुसैन[6] ने $\bar{H}$ फलन द्वारा किया है जिसे निम्न रूप में परिभाषित एवं अंकित किया जावेगा :

$$\bar{H}^{m\ n}_{p\ q}\left[Z\left|\begin{matrix}, (\alpha_j, A_j; a_j)_n, n+1\ (\alpha_j, A_j)_p \\ , (\beta_j, B_{jm}, m+1\ (\beta_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_L \phi(s)\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j-B_js)\prod_{j=1}^{n}a_j(1-\alpha_j+A_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma^{b}j(1-\beta_j+B_js)\prod_{j=n+1}^{p}(\alpha_j-A_js)} \tag{1.2}$$

जहाँ $\alpha_j(j=1, ...p)$ तथा $\beta_j(j=1,...q)$ संमिश्र संख्याएँ हैं तथा $A_j(j=1, ...p)$ तथा $B_j(j=1,...q)$ वास्तविक संख्याएँ हैं एवं $a_j(j=1, ...n)$ तथा $b_j(j=m+1, ...q)$ अपरिमेय मान ग्रहण कर सकते हैं। पुन: L मैलिन-बार्नीज प्रकार का एक उपर्युक्त कंटूर है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि $\bar{H}$ फलन सार्थक होता है।

इस फलन के लिए हाल ही में बुशमान तथा श्रीवास्तव[2] ने दर्शाया है कि (1.1) के दाहिने पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है जबकि

$$\theta>0 \text{ तथा } |ar\, gz|< \frac{\theta\pi}{2},$$

जहाँ

$$\theta=\sum_{j=1}^{m}|B_j|+\sum_{j=1}^{n}|a_j A_j|-\sum_{j=m+1}^{q}|b_j B_j|-\sum_{j=n+1}^{p}|A_j| \tag{1.3}$$

इस फलन का अध्ययन हाल ही में राठी[7,8] ने किया है। उन्होंने (1.1) के दाहिने पक्ष के समाकल के अभिसारी की तीन अलग-अलग शर्तें ज्ञात कीं। अपने अन्य शोधपत्र में राठी[8] ने दर्शाया कि—

$$\bar{H}(z)\sim 0(z^{\lambda}) \tag{1.4}$$

z के अल्पमान के लिए जहाँ

$$\lambda=\min_{i\leqslant j\leqslant m} \tag{1.5}$$

2. मुख्य परिणाम

इस खण्ड में $\bar{H}$ फलन के लिए निम्न व्यापक संघनन सूत्र ज्ञात किया जायेगा जो नवीन प्रतीत होता है।

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+i+1)]_r\, r!}$$

$$\bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-j-p,\lambda)\,(1-r-p,\lambda)\ {}_1(\alpha_j,A_j;a_j)_n\ {}_{n+1}(\alpha_j,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,B_j)_m\ {}_{m+1}(\beta_j,B_j;b_j)_q\,(1-r-j-2p,2\lambda)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{\lambda s}\,\phi(s)\Big[\frac{\Gamma(p+\lambda s+j)\,\Gamma(p+\lambda s)}{\Gamma(2p+2\lambda s+j)}$$

$$\times\frac{A_{ij}\,2^{\alpha+\beta+i-2}\,\Gamma(\alpha+\beta+i+1)/2\;\Gamma(p+\lambda s+[j/2]+1/2)}{\Gamma 1/2\;\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$$

$$\times\Gamma(p+\lambda s-(\alpha+\beta+|i+j|-j-1)/2)$$

$$\Big\{\frac{B_{ij}\,\Gamma(\alpha/2)+((1-(-1)^i/4))\,\Gamma(\beta/2)}{\Gamma(p+\lambda s-\alpha/2+\frac{1}{2}+[j/2]-(-1)^j/4\,(1-(-1)^i))\,\Gamma(p+\lambda s-\beta/2+\frac{1}{2}+[j/2]}$$

$$+\frac{C_{ij}\,\Gamma(\alpha/2)+((1+(-1)^i/4))\,\Gamma(\beta/2+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\lambda s-\alpha/2+[(j+1)/2]+(-1)^j/4\,(1-(-1)^i)\,\Gamma(p+\lambda s-\beta/2+[(j+1)/2])}\Big\}\Big]\,ds \tag{2.1}$$

जहाँ A_{ij}, B_{ij} व C_{ij} वैसा ही है जो (5) में दर्शाया गया है।

(जहाँ $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=p+\lambda s$)

3. उपपत्ति

परिणाम (1.2) को सिद्ध करने के लिए इसके वामपक्ष को $\bar{H}$ फलन की परिभाषा (1.1) की सहायता से मैलिन-बार्नीज समाकलन के पदों में लिखकर व्यक्त करते है तो हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है—

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+i+1)_r\,r!}$$

$$\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{\lambda s}\,\phi(s)\;\frac{\Gamma(p+\lambda s+j)\,\Gamma(p+\lambda s+r)}{\Gamma(2p+2\lambda s+j+r)}\,ds\Big\}$$

तत्पश्चात् समाकलन एवं श्रेणी का क्रम परिवर्तन करते हैं तब प्राप्त श्रेणी का योग करते हैं तो हमे निम्न फल प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \phi(s)\,z^{\lambda s}\;\frac{\Gamma(p+\lambda s)\,\Gamma(p+\lambda s+j)}{\Gamma(2p+2\lambda s+j)}$$

$$\cdot\,{}_3F_2\left(\alpha,\beta,p+\lambda s;\frac{\alpha+\beta+i+1}{2},2p+2\lambda s+j;1\right)ds \tag{3.1}$$

अब $3F_2$ के लिए ज्ञात फल लेवाई, ग्रोनडीन तथा राठी[5] का प्रयोग कर, थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें वांछित फल प्राप्त होता है।

4. **विशिष्ट दशाएँ**

(1) यदि (2.1) में $\beta=-2n$ एवं $a=\alpha+2n$ ले तो हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है।

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+2n)_r\,(-2n)_r}{[\frac{1}{2}(\alpha+i+1)]_r\, r!}$$

$$\bar{H}_{p+2\;q+1}^{m\;\;n+2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (1-j-p,\lambda)\,(1-r-p,\lambda)\;{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n\;{}_{n+1}(\alpha_j\, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m\;{}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q\,(1-r-j-2p, 2\lambda) \end{matrix} \right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L z^{\lambda s}\,\phi(s)\left\{\frac{\Gamma(p+\lambda s+j)\,\Gamma(p+\lambda s)}{\Gamma(2p+2\lambda s+j)}\right.$$

$$\left.\times\frac{D_{ij}(\frac{1}{2})_n\,[\alpha/2-(p+\lambda s)-(-1)j/4-[i/2+(1-(-1)^i)]+3/4]_n}{[p+\lambda s+\frac{1}{2}+[j/2]]_n\,[\alpha/2+(1+(-1)^i)]_n}\right\} ds$$

$i=0, \pm1, \pm2$ तथा D_{ij} वैसा ही है जो (5) में दिया गया है—

(जहाँ $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=p+\lambda s$)

(2) यदि (3.1) में हम $\beta=-2n-1$ एवं $a=2n+\alpha+1$ लें तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा।

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2n+\alpha+1)_r\,(-2n-1)_r}{[\frac{1}{2}(\alpha+i+1)]_r\, r!}$$

$$\bar{H}_{p+2\;q+1}^{m\;\;n+2}\left[\begin{matrix} (1-j-p,\lambda)\,(1-r-p,\lambda)\;{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n\;{}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m\;{}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q\,(1-r-j-2p, 2\lambda) \end{matrix} \right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma(p+\lambda s+j)\,\Gamma(p+\lambda s)}{\Gamma(2p+2\lambda s+j)}$$

$$\cdot\frac{E_{ij}(3/2)_n\,[\alpha/2-p-\lambda s+(-1)i/4-[j/2+(1+(-1)^i)]+5/4]_n}{[p+\lambda s+\frac{1}{2}+[(j+1)/2]_n\,[\alpha/2+1/4(3-(-1)^i)]_n}\; z^{\lambda s}\,\phi(s)\Big\} ds$$

$i, j=0, \pm1, \pm2$ तथा E_{ij} वही ही है जो (5) में दिया गया है।

(जहाँ $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=p+\lambda s$)

इसी प्रकार अन्य अज्ञात फल ज्ञात किए जा सकते हैं।

(3) यदि हम सूत्र (3.1) में

(1) $i=0, j=0$ (2) $i=-1, j=0$

(3) $i=-1, j=1$ (4) $i=0, j=-1$

(5) $i=0, j=1$ (6) $i=1, j=-1$

(7) $i=1, j=0$

लें तो थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें देवड़ा[3] के ज्ञात फल प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार i एवं j को विभिन्न मान देने से हमें अन्य रोचक अज्ञात फल प्राप्त होते हैं परन्तु स्थानाभाव उन्हें हम यहाँ नहीं दे रहे हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Composite Math. 1964, 15, 239-301

2. बुशमान, आर० जी० तथा श्रीवास्तव एच० एम०, Phys A, Math, Gen. 1990, 23

3. देवड़ा, एच० एम०, पी० एच-डी० थीसिस, अजमेर विश्वविद्यालय, 1994

4. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc. 1961, 98, 359-429

5. लेवाई, डी० एल०, ग्रोनडीन, एफ० तथा राठी, ए० के०, Indian J. Math. 34(i) 23-32

6. इनायत हुसैन, ए० ए०, J. Phys A. Math. Gen. (प्रकाशाधीन स्वीकृत)

7. राठी, ए० के०, (प्रकाशनाधीन)

8. राठी, ए० के०, On a study of $\bar{H}$ function (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

राजस्थान की आदिवासी जातियों द्वारा अपनाई जाने वाली मत्स्य आखेट विधियाँ

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना
झाडोल (फ.), उदयपुर, 313702

[प्राप्त—सितम्बर 1, 1994]

सारांश

राजस्थान में भील, गरासिया, सहारिया, कथोडी, मीणा इत्यादि आदिवासी जातियाँ निवास करती हैं। ये जातियाँ मछली मारने में कई तरह के परम्परागत तरीके प्रयोग में लाती हैं जिनमें गैला, फसला, तीर, पोहरी, मीन-विष, थाली-माडिया आदि विधियाँ प्रमुख हैं। विशेष बात यह है कि आदिवासियों के मत्स्य-आखेट-उपकरण स्थानीय रूप से उपलब्ध सामग्री से बने होते हैं जो प्रभावी तथा प्रदूषणरहित होते हैं।

Abstract

Fishing methods of tribals of Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.), Udaipur, 313 702.

Bhils, Garasias, Saharias, Kathodis, Meenas etc. are main tribes of Rajasthan. They practice many traditional fishing methods like Gaila, Fasla, Arrow, Pohari, Stupefying Material, Thali-Madia etc. It is very interesting that their fishing devices are prepared by locally available materials which are quite effective and pollution-free also.

राजस्थान में भील, गरासिया, सहारिया, कथोडी, मीणा इत्यादि आदिवासी जातियाँ निवास करती हैं। आदिवासी जातियाँ जंगलों में निर्वाह करने वाली जातियाँ हैं। इन लोगों का जीवन वनों पर निर्भर रहता है। इन जातियों के वनस्पतियों से सम्बन्ध को वनस्पति विज्ञान की एक पृथक शाखा "एथनोबॉटनी" के अन्तर्गत तथा प्राणियों से सम्बन्ध को प्राणि विज्ञान की पृथक शाखा "एथनोजूलॉजी" के अन्तर्गत अध्ययन किया जाता है। आदिवासी समुदाय के लोग विभिन्न भोज्य-सामग्री तथा अन्य घरेलू

उपयोग की वस्तुएँ पौधों एवं प्राणियों से प्राप्त करते हैं। प्राणि-उत्पादों में विभिन्न पक्षियों और सरीसृपों के अण्डे, सूअर, हरिणों व अन्य शाकाहारी चौपायों का मांस, मछलियाँ, कई प्राणियों की चर्बी, नाखून हड्डी, चमडा, पंख, महत्वपूर्ण हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में राजस्थान के आदिवासियों द्वारा प्रयुक्त मछलियों के शिकार की विधियों का विवरण दिया गया है।

कम वर्षा वाला राज्य होने के बावजूद राजस्थान में 95 प्रजातियों की मछलियाँ पाई जाती हैं (जोहल तथा अन्य[1])। दक्षिणी एवं दक्षिण-पूर्वी राजस्थान में वर्षा अपेक्षाकृत अधिक होती है तथा ये मत्स्य-बहुल क्षेत्रों में गिने जाते हैं। इन क्षेत्रों में बाँध, एनिकट, तालाब, झील, नदी-नालों आदि जल स्रोतों की बहुतायत है। यद्यपि गर्मी में अधिकांश नदियाँ सूख जाती हैं किन्तु जगह-जगह गड्ढों में भरे पानी में मछलियाँ सिमट जाती हैं।

राजस्थान में परम्परागत विधियों के अलावा शहरों से आई आधुनिक विधियाँ भी धीरे-धीरे मछली पकडने में प्रयुक्त होने लगी हैं। ऐसी विधियों में तरह-तरह के जाल व विस्फोटक प्रमुख हैं।

आदिवासी लोग पकड़ी गई मछलियों को शहरों में बेचते नहीं हैं अपितु आपस में बाँटकर घरेलू उपयोगों में काम में लाते हैं। यदि ज्यादा मछलियाँ पकड़ ली जाती हैं तो स्थानीन रूप से ही बेची जाती हैं।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन दक्षिण राजस्थान के सिरोही, उदयपुर, बांसवाडा, डूंगरपुर, चित्तौडगढ, भीलवाडा एवं राजसमन्द जिलों, दक्षिण-पूर्वी राजस्थान के कोटा, बारां एवं झालावाड जिलों तथा पूर्वी राजस्थान के सवाई माधोपुर जिले में किया गया। दक्षिण-पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान से लगे मध्यप्रदेश के शिवपुरी, गुना एवं मंदसौर तथा गुजरात के बनास-कांठा तथा साबर-कांठा जिलों का भी आंशिक सर्वे किया गया। सर्वे कार्य वर्ष 1986 से 1993 तक किया गया।

अध्ययन प्रक्रिया

दक्षिणी एवं दक्षिणी-पूर्वी राजस्थान के बांधों, नदी-नालों, तालाबों, एनिकटों आदि का विभिन्न मौसमों में सर्वे किया गया तथा आदिवासियों द्वारा अपनाई गई विधियों का अवलोकन किया एवं जानकारी संग्रह की। वन विभाग के स्थानीय कर्मचारियों का आदिवासियों से घनिष्ठ संबध होता है। कर्मचारियों की मदद लेकर विभिन्न प्रश्नावलियों की मदद से मत्स्य-आखेट की विधियों का ज्ञान प्राप्त किया गया। आदिवासियों की भाषा-बोली को ठीक-ठीक समझने के लिये स्थानीय वन-कर्मचारियों की भूमिका दुभाषिये की तरह होने से सम्पर्क में सुविधा रही।

मत्स्य आखेट विधियाँ

सर्वे क्षेत्र में अध्ययन के दौरान कई परम्परागत विधियों को देखने का अवसर मिला जिनका विवरण इस प्रकार है—

(1) "गैला" विधि

यह विधि उन नदी-नालों में अपनाई जाती है जिसका पाट 50 से 100 मीटर तक चौडा होता है। यह विधि वर्षा ऋतु में लाया जाता है। मानसून के उतार के तुरन्त बाद जब बहाव फुट दो फुट गहरा होता है, इस विधि को काम में लाया जाता है। "गैला" राजस्थानी शब्द है जिसका अर्थ है "रास्ता" अर्थात् नदी के बहाव में उपस्थित मछलियों को एक या दो निश्चित "गैलों" (रास्तों) से गुजरने दिया जाता है जहाँ इन्हें पकड़ लिया जाता है।

गैला-निर्माण के लिये नदी के बहाव के समकोण दिशा में नदी के आरपार नेगड (Vitex Negundu) या करंज नामक वनस्पति काट कर पानी में ऊर्ध्व खडी कर पानी के सामने एक अवरोध खडा किया जाता है। झाडियों को बहने से रोकने के लिये क्षैतिज दिशा में लम्बी-लम्बी बल्लियाँ बाँधी जाती हैं जिन्हें "आडिया" कहते हैं। आडिया टीमरूण (Diospyros melanoxylon), बरगद (Ficus bengalensis) आदि वृक्षों से लिये जाते हैं। इस अवरोध को बहने से एवं उलटने से बचाने के लिये बहाव की दिशा में तिरछी स्थिति में छोर पर दुसंके सहारे लगाये जाते हैं जिन्हें 'थूणिये" कहते हैं। ये बरगद, पलाश (Butea monosperma) आदि वृक्षों से लिये जाते हैं। दुसंके सहारों को बहने से रोकने के लिये भारी पत्थरों का ढेर उनके भूमि के गड़े छोरों के पास लगा दिया जाता है। अब हरे बाँस (Dendrocalamus strictus) की फाड बनाकर लगभग 2.0 मीटर लम्बी चटाई बुनी जाती है जिसका एक छोर लगभग 0.80 मीटर तथा दूसरा लगभग 0.30 मीटर चौडा होता है। इस चटाई को गोल लपेट कर शंकुनुमा पाइप बना लिया जाता है जो एक तरफ ज्यादा चौडा तथा दूसरी तरफ सँकरा होता है। इसे ही भील लोग "गैला" कहते हैं। कथोडी इसे "वाना" कहते हैं।

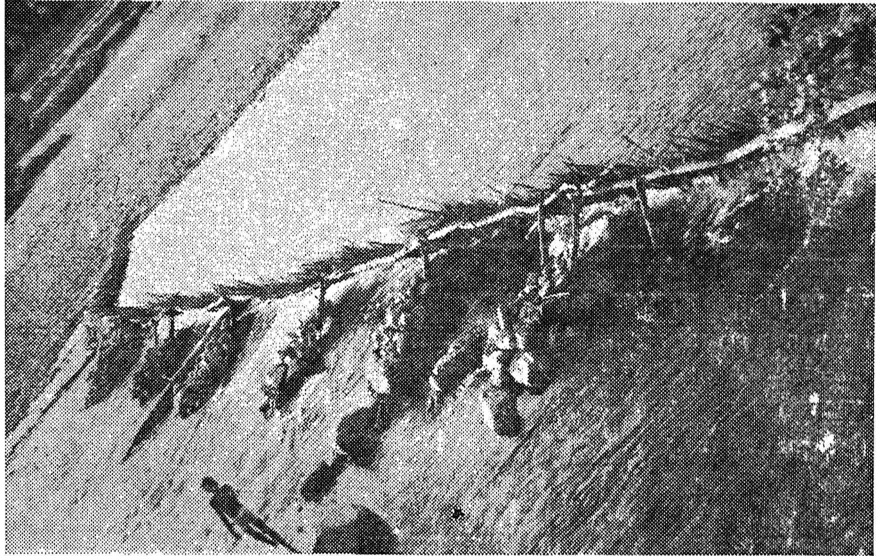
करंज (Pongamia pinnata) की छाल या अन्य उपयुक्त पौधों की छाल से बाँस के पाइप के जोड को सिल दिया जाता है ताकि पाइप खुलकर पुनः चटाई न बन जावें। पाइप के सँकरे छोर में करंज की पत्तियाँ भरकर डाट लगा दी जाती है ताकि छोटा सा छेद भी मछलियों के भागने के लिये खुला नहीं रहे।

नेगड की ऊर्ध्व दीवाल में बाँस की चटाई के पाइप के बडे छेद के बराबर एक छेद बनाया जाता है। यह छेद पानी की ऊपरी सतह के लगभग आधा फुट नीचे से शुरू कर ऊपर की ओर बनाया जाता है। इस छेद के सामने बाँस की चटाई के पाइप को विभिन्न पेडों की छाल से बाँध दिया जाता है। गैला पानी के बहाव की दिशा में कुछ तिरछा पड़ा रहता है। यह आंशिक रूप से ही पानी में डूबा रहता है।

यदि नदी का पाट अपेक्षाकृत कम है तो एक "गैला" लगाया जाता है। यदि पाट चौड़ा है तो दोनों किनारों की तरफ एक-एक यानी कुल दो "गैले" लगाये जाते हैं (चित्र 1)।

नेगड की दीवाल से पानी तथा बहुत छोटे आकार की मछली तो छनकर बह जाती हैं लेकिन मध्यम एवं बडे आकार की मछलियाँ पार नहीं जा पातीं। वे गैला से ही होकर गुजरती हैं तथा उसमें

ही रह जाती हैं । मछली पकड़ने वाले थोड़े-थोड़े अन्तराल पर जाकर गैलों में आई मछलियों को एकत्र कर लेते हैं । कई बार पकडी गई मछलियों को खाने के लिये पानी के साँप भी गैलों पर आ कर बैठ जाते हैं जिन्हें भगा दिया जाता है ।



चित्र 1 : चौडे पाट वाली नदी पर लगाया हुआ गैला : एक विहंगम दृष्टि । बाँस का बना गैला पानी निकास के दूसरे "स्पान" (Span) में लगाया गया है ।

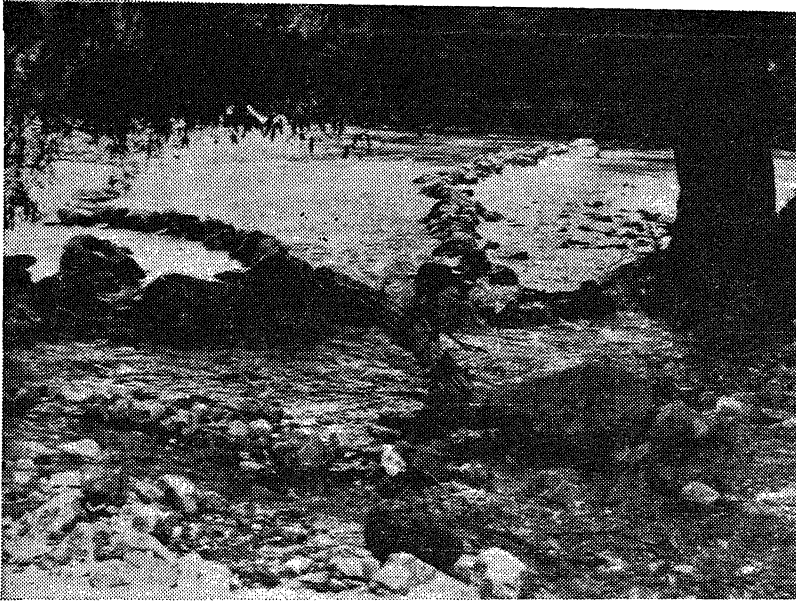
एक बार लगाया गैला महीना-दो महीना काम आता है । सितम्बर से अक्टूबर तक गैला विधि से मछलियाँ पकडी जाती हैं ।

(2) "केरिया" विधि

यह विधि प्रत्येक भारी वार्षा के तुरन्त बाद सँकरे पाट के नालों में प्रयोग में लाई जाती है । वर्षा के तुरन्त बाद जलग्रहण क्षेत्रों से पानी तेजी से नीचे उतरता है तथा नालों में बह जाता है । कुछ घन्टे बाद बहाव जब धीमा पड जाता है, इस विधि को अपनाया जाता है ।

सर्वप्रथम नालों के दोनों किनारों से शुरू करके बडे पत्थरों की एक एक दीलाल सी बनाई जाती है । दोनों ओर की दीवालें बहाव की दिशा में एक दूसरे की तरफ क्रमशः इस तरह बढ़ाई जाती हैं कि कुछ दूर जाकर दोनों के बीच में 1 मीटर या कुछ कम दूरी रह जाती है । अब दोनों दीवालों के बीच में बाँस (Dendrocalamus strictus) से बने "केरिया" को रखकर पत्थरों की मदद से रोका जाता है ।

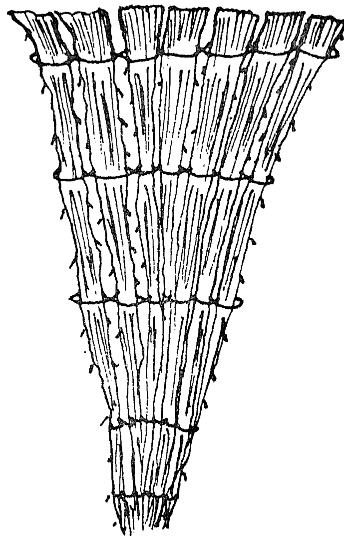
"केरिया" बनाने के लिये हरे बाँसों की दो-दो फाड बना कर एक 2.0 मीटर लम्बी चटाई सी बनाई जाती है जो एक ओर 1.0 मीटर चौडी तथा दूसरी ओर 0.30 मीटर चौडी होती है। बाँस का फटा हिस्सा नीचे की ओर रखा जाता है ताकि मछली पकड़ते समय फाड की तरफ की खुरचने अंगुलियों को चोट न पहुँचायें। इस चटाई को "गैले" की तरह गोल न कर खुले हुये एक वृक्ष की चाप की तरह रखते हैं (चित्र 2)। कभी-कभी केरिया के संकरे छोर को शंक रूप में गोल भी कर दिया जाता है। केरिया बाँस के बजाय खजूर (Phoenix sylvestris) की हरी पत्तियों के पर्ण-अक्षों (leaf axes) से भी बनाये जाते हैं (चित्र 3)। चूंकि खजूर की पत्तियों के अक्ष एक तरफ काफी चौडे तथा दूसरी तरफ बहुत पतले होते हैं। अत: इनसे बहुत अच्छे "केरिया" बनते हैं। केरिय टायफा (Typha angustata, T. elephantina) के भी बनाये जाते हैं।



चित्र 2 : नदी के पाट में बाँस का बना केरिया लगाया हुआ।

केरिया विधि से मछली पकडने के लिये एक आदमी "केरिया" के पास बैठा रहता है। जैसे ही कोई मछली बहकर आती है तथा "केरिया" से गुजरती है उसे तुरन्त पकड़ लिया जाता है। कई बार दो या अधिक आदमी इस विधि में सहयोग करते हैं। पानी आने की दिशा में एक या दो आदमी पत्थर की दीवालों के सहारे-चलते हुये मछलियों को केरियिा की तरफ जाने के लिये बाध्य करते हैं। जैसे ही मछलियाँ केरिया से गुजरने लगती हैं वहाँ उपस्थित आदमी द्वारा पकड ली जाती हैं।

केरिया नदी के अपेक्षाकृत समतल पाट वाले भाग पर बनाया जाता है। नदी की चौडाई ज्यादा होने पर एक ही जगह दो केरिया भी बनाये जाते हैं।



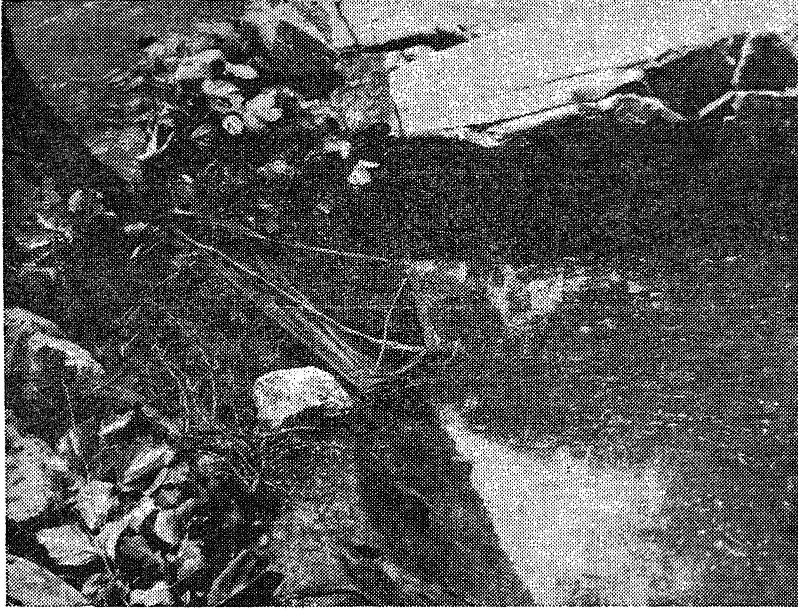
3

चित्र 3 : खजूर की पत्तियों की पर्ण-अक्षों का बना केरिया ।

(3] "फसला" विधि

फसला शब्द संभवत: "फँसाने" से व्युत्पन्न हुआ है । वह उपकरण जो फँसाये, "फसला" कहलाता है । फसला बनाने के लिये डेढ मीटर की लम्बी लकडी ली जाती है । इसके एक छोर पर तौलिये या ऐसे ही किसी छोटे वस्त्र के एक छोर को बाँधा जाता है । वस्त्र के दूसरे छोर को डंडे के मध्य में बाँधा जाता हैं । इस तरह बाँधने से वस्त्र ढीली झोली के रूप से डंडे से लटकता है । अब लगभग आधी मीटर लम्बी पतली लकडी डंडे के ऊपर रख दी जाती है । तौलिये के दोनों पार्श्व किनारे लकडी के दोनों छोरों पर डालने से झोली खुल जाती हैं । इस तरह बने फसले से किसी पतली धार के रूप में पत्थरों के मध्य बहते-गिरते पानी को औंटा जाता है । पानी वस्त्र से छन जाता है तथा मछलियाँ फसले में रह जाती हैं । कई बार फसले को पानी में डुबा कर रखा जाता है तथा मछलियों के आने पर अचानक ऊपर उठा लिया जाता है (चित्र 4)। फसला से छोटे आकार की मछलियाँ पकडी छाती हैं । फसला बाँस की पतली-पतली ताडियों से भी टोकरी के आकार में बनाया जाता है ।

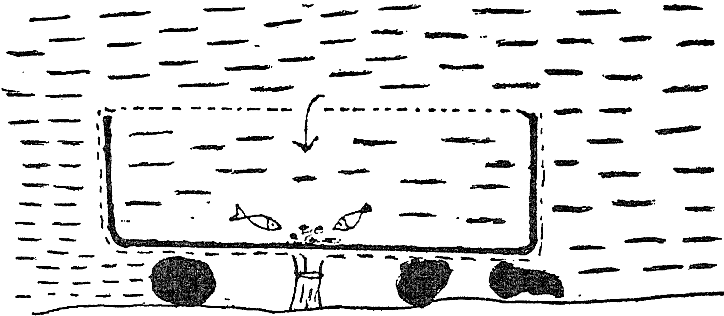
कई बार कडे वस्त्र के चारों कोनों को दो या चार आदमी पकडकर पानी में उसी तरह मछली पकडते हैं जैसे जाल से पकडी जाती हैं । वस्त्र से मछली पकड़ना फसलों का ही रूप है ।



चित्र 4 : मछली पकडने का फसला ।

(4) "थाली-मांडिया" विधि

नदी-नालों में जब पानी स्वच्छ हो जाता है तथा उसकी पारदर्शिता बढ़ जाती है, इस विधि को अपनाया जाता है । यह विधि प्रानः छोटे बच्चों द्वारा छोटे आकार की मछलियों को पकडने में काम में

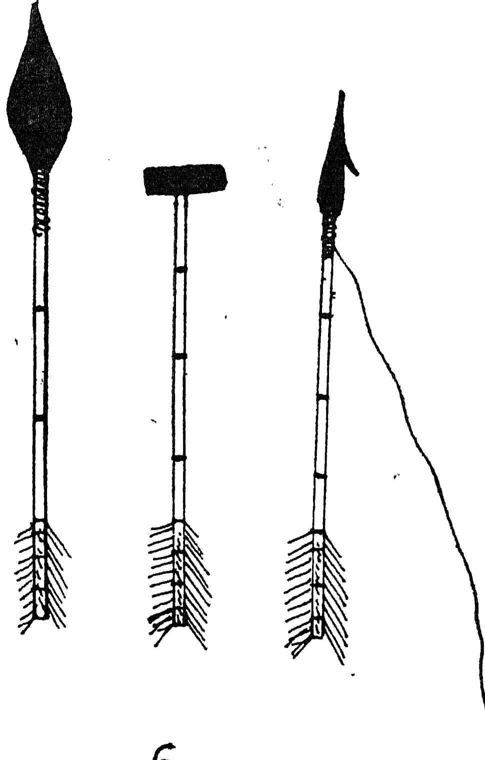


चित्र 5 : थाली-माडिया (खडी काट में दृश्य) ।

लाई जाती है । इस विधि में कांसे की थाली पर एक बारीक सफेद कपड़ा तान कर उसे थाली के नीचे बाँध दिया जाता है । ऊपर तने हुए कपड़े में एक छोटा छेद बनाया जाता है । इस छेद से कुछ आटे की गोलियाँ थाली में डाल दी जाती हैं तथा थाली को पानी में डुबा कर समतल जगह पर रख दिया जाता है । आटा खाने के लिये मछलियाँ कपडे के छेद से थाली में प्रवेश कर जाती हैं । कुछ मछलियाँ जमा होते ही थाली को पानी से बहकर निकाल लिया जाता है । मछलियाँ पकड़ कर थाली पूर्ववत् पुनः रख दी जाती है (चित्र-5) ।

(5) "तीर" विधि

आदिवासी क्षेत्र में अलग-अलग तरह के जानवरों के शिकार के लिये अलग-अलग तरह के तीर प्रचलन में हैं । "पालडी" नामक तीर खरगोश, सांभर, सूअर आदि के शिकार के लिये, "फैन्ना" पक्षियों के लिये तथा "औद" मछलियों से शिकार के काम आता है । "फैन्ना" में नोक पर नुकीली वस्तु न लगाकर बाँस की पोरी का एक गुटका छोर पर लगाया जाता है । गुटके के कारण यह तीर आगे से भोथडा हो जाता है अतः यह शिकार के शरीर में घुसकर न तो घाव करता है न माँस के टुकडे करता



चित्र 6 : "पालडी", "फैन्ना" तथा "औद" नामक तीर ।

है बल्कि आन्तरिक चोट पहुँचा कर प्राणी का अन्त कर देता है। "पालडी" नामक तीरों की नोंक पर छोटा परन्तु तीक्ष्ण भाला लगा होता है जो शिकार के शरीर में गहरा घाव बनाता है। "औद" एक विशेष प्रकार का तीर है। "औद" की नौंक पर एक तीक्ष्ण "हुक" लगा होता है तथा इससे एक पतली और हल्की डोरी जुडी रहती है। इस तीर को किसी बड़ी मछली पर धनुष से छोड़ा जाता है, हुक के सामने की तीक्ष्ण चोंच घाव बनाकर मछली के शरीर में घुस जाती हैं तथा पीछे की ओर मुडी चोंच एक हुक की तरह शरीर में अटक जाती है (चित्र 6)। इस तरह अटकी मछली को तीर से लगी डोर द्वारा पानी से बाहर खींच लिया जाता है। यह विधि वर्षा की समाप्ति के बाद के माहों में काम में ली जाती है। चूंकि वर्षा में मिट्टी बहकर आती है अत: पानी में पारदर्शिता कम रहती है, विशेष कर गहरे पानी में देखना असंभव होता है। बाद में पानी साफ हो जाने से मछलियों को पानी में देखना आसान हो जाता है।

(6) **मीन-विष** (Stupefying Material)

जोशी[2] द्वारा अरावली क्षेत्र के आदिवासियों द्वारा प्रयुक्त मीन-विषों का विवरण दिया गया है। आदिवासी स्थानीय वनों में मिलने वाली वनस्पतियों से प्राप्त मीन-विषों को काम में लाते हैं। कुछ प्रचलित मीन-विष सारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

राजस्थान के आदिवासियों द्वारा प्रयुक्त किये जाने वाले मीन-विष

क्र० स०	मीन-विष का स्रोत पौधा	पौधे का प्रयुक्त भाग	उपयोग की विधि
1.	मोजाल Casearia tomentosa	फल	कूट कर पानी में डालने पर बेहोश होकर मछलियाँ पानी पर तैरने लगती हैं।
2.	चुरेल (Holoptelia integrifolia)	पत्ती	—"—
3.	खाखरा (Butea monosperma)	छाल	—"—
4.	बेल-पत्र (Aegle marmelose)	छाल	—"—
5.	अकासिया* (Acacia auriculiformis)	छाल, नई शाखा, फूल, फल,	—"—

6.	अरीठा (Sapindus emarginatus)	फल	—"—
7.	आँवला (Emblica officinalis)	छाल	—"—
8.	विष-तेंदु (Diospyros montana var. cordifolia)	फल	—"—
9.	अराल	छाल	—"—

*यह विदेशी प्रजाति का पौधा वन विभाग द्वारा वन क्षेत्रों में रोपित किया गया है। स्थानीय लोग इसे "अकाशिया" नाम से जानते हैं। क्षेत्र में कहीं-कहीं सफेदा को भी इसी नाम से जाना जाता है।

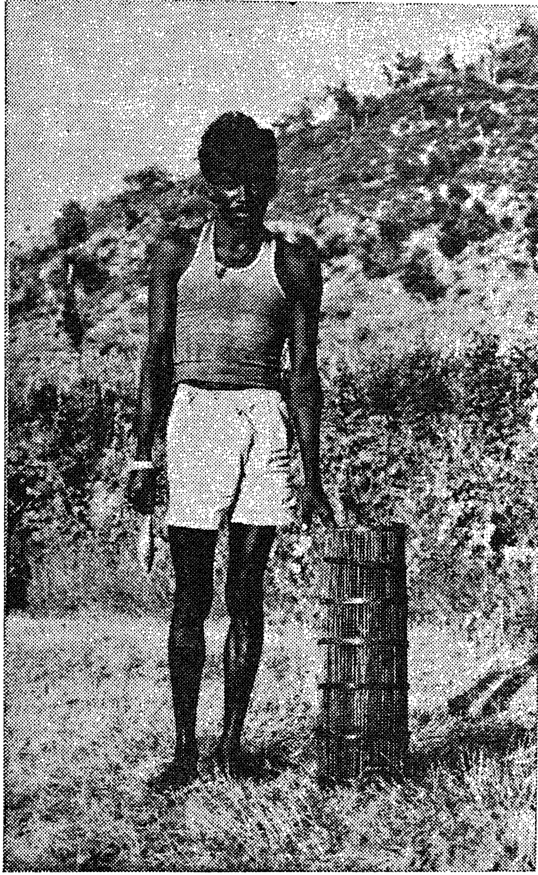
मीन-विष नदी-नालों में पानी के गड्ढों में डाल दिया जाता है जिससे मछलियाँ अचेत होकर ऊपर तैरने लगती हैं जिन्हें संग्रह कर लिया जाता है। यदि बहते हुए पानी में मीन-विषों का उपयोग करना पड़े तो बहाव के सामने एक बडा कपड़ा तान कर बहाव को मंद किया जाता है तथा मीन-विष पानी में छोड दिया जाता है। कई बार बहाव के समकोण पत्थरों की दीवार चिन कर भी मीन-विषों का उपयोग किया जात है।

आजकल कई जगह अशिक्षित आदिवासी पानी गड्ढो में खेती में प्रयोग किये जाने वाले कीट-नाशकों को पानी में घोल कर मछलियाँ मारने लगे हैं। यह प्रवृत्ति खतरनाक है। इससे न केवल जल स्रोत दूषित होते हैं बल्कि उस पानी को पीने वाले अन्य जीव-जन्तु भी मरते हैं साथ ही रासायनिक विषों से मारी गई मछलियाँ स्वयं खाने वालों के लिये भी घातक हैं। आदिवासी लोग नदी-नालों का पानी ही पीने के काम में लाते हैं। दूषित पानी उनके स्वास्थ्य के लिये भी खतरा है। रासायनिक विषों से व्यापक क्षेत्र में मछलियाँ एवं अन्य जलीय प्राणी समाप्त हो जाते हैं तथा निर्जीव हुए जलस्रोतों को पुनः आबाद होने में अपेक्षाकृत अधिक समय लगता है।

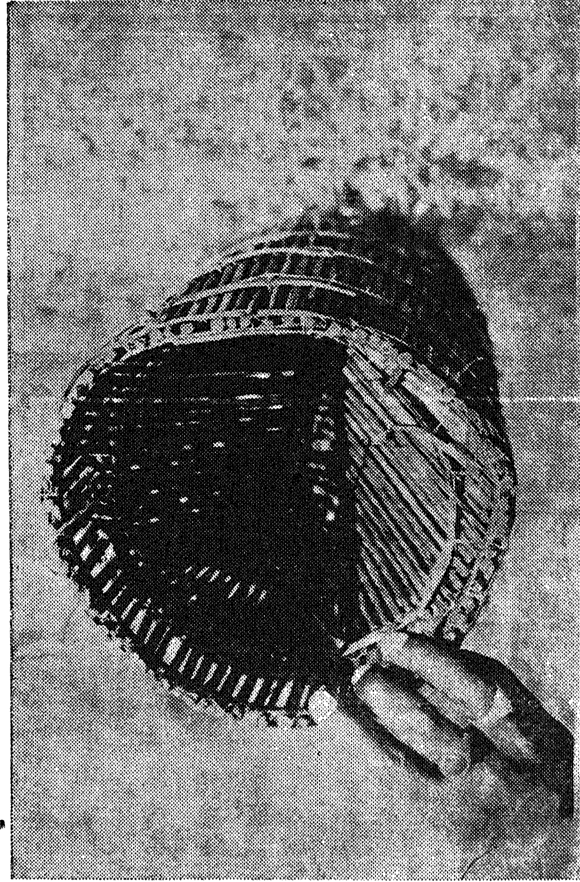
(7) "पोहरी" विधि

"पोहरी" बाँस की पतली-पतली ताडियों से 60-70 सेमी ऊँची तथा 30-40 सेमी व्यास वाली बेलनाकार टोकरी होती है जिसका पेंदा भी बाँस की ताडियों से ही बना कर बंद किया जाता है। मुँह पर बाँस की ताडियों का कीप लगा होता है। कीप का सँकरा छेद 4-5 सेमी० व्यास वाला होता है। नीचे की ओर एक छोटी खिडकी होती है जिससे मछलियाँ बाहर निकाली जाती हैं। भील तथा गरामिया लोग इन टोकरियों को "पोहरी" तथा कथोडी "मली" या "पिंजरा" कहते हैं। पोहरी का उपयोग करने के लिये नाले के बहाव के समकोण पत्थरों की दीवाल सी चुन कर पानी की गहराई बढाई जाती है। कुछ पानी एवं बहुत छोटी मछलियाँ पत्थरों के बीच के स्थान के निकलती रहती हैं परन्तु

बड़ी मछलियाँ नहीं निकल पातीं। संग्रह हुये पानी को एक या अधिक स्थानों पर दीवाल के ऊपरी हिस्से पर रखे चपटे पत्थरों से गुजार कर सामने रखी पोह्‌री के कीप में गिराते हैं। पानी छन कर बह जाता है तथा मछली पोह्‌री में आ जाती है। कीप के कारण मछली वापस निकल नहीं पाती। कई बार पोह्‌री "गैला" के साथ भी लगाई जाती है (चित्र 7)। पोह्‌री में जलीय साँप (स्थानीय बोली में इन्हें डिण्डोलिया, डिण्डू एवं दीवड कह्‌ते हैं) भी अक्सर मछलियों के साथ पकडे जाते हैं जिन्हें मछलियाँ निकालते समय छोड दिया जाता है।



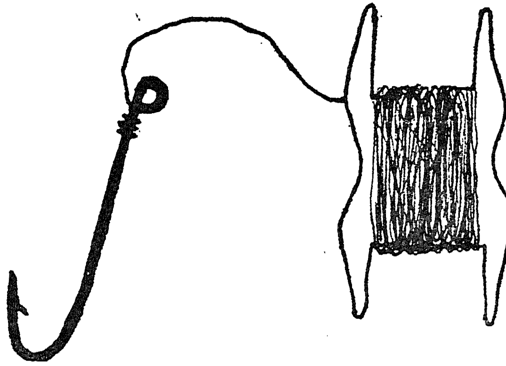
चित्र 7 (अ) : बाँस से बनी पोह्‌री :
एक कथोडी लडका पोह्‌री के पास खडा है। उसके एक हाथ में मछली है।



चित्र 7 (ब) पोहरी के मुँह पर लगे कीप की रचना।

(8) "काँटा" विधि

काँटा लगभग 1.5 से 2.0 मि० मी० मोटे लोहे के मजबूत तार से बनाया जाता है। काँटा एक हुकनुमा रचना होती है, जिसमें हुक की छोटी बाजू पर पीछे की ओर निकला एक छोटा तीक्ष्ण काँटा होता है जो छैनी से बनाया जाता है। काँटा 4-5 से० मी० लम्बा होता है। काँटे के ऊपर की ओर एक घुण्डी होती है जिसके नीचे प्लास्टिक का सफेद या हल्के रंग का 1.0 मि० मी० मोटा डोरा बाँधा हैं। प्लास्टिक का डोरा न होने पर रेशम का या अन्य उपलब्ध मजबूत पतला डोरा बाँधा जाता है। काँटे की ऊपरी घुण्डी डोरे को खिसकने से बचाती है। डोरी को 'H' आकार के उपकरण "गडी" पर पपेटा जाता है। गडी करंज, पलाश, खिरनी (wrightia tinctoria) आदि की लकडी से बनाई जाती है (चित्र 8)। काँटा विधि अपेक्षाकृत आधुनिक है।



8

चित्र 8 : मछली पकडने का काँटा ।

काँटा बडी मछलियों को पकडने के काम में लिया जाता है । काँटे में 'बेट' के रूप में तीन प्रजाति के प्राणी प्रयोग में लिये जाते हैं :

1. मेंढक (स्थानीय नाम ढेडका, डेटका),
2. केंचुआ (स्थानीय नाम अलसिया),
3. छोटे आकार की मछली ।

जिस मेंढक को 'बेट' के रूप में काम में लाया जाता है वह Rana cyanophlictus जाति का होता है । यह मेंढक लगभग पूरे साल जलस्रोतों में मिलता हैं तथा छोटे आकार का होने से उपयुक्त 'बेट' सिद्ध होता है । इस जाति की मादा की अधिकतम लम्बाई (थूथन के मलद्वार तक) 60 मि० मी० होती है तथा नर और भी छोटा होता है। (डेनियल,[3]) । काँटा जीवित मेंढक की प्रतिपृष्ठ सतह पर गले में फँसाया जाता है ।

केंचुए वर्षा के अलावा शेष समय भूमिगत रहते हैं । आदिवासी इन्हें खोद कर ढूंढ निकालने में निपुण होते हैं । नालों के किनारे उगे करंज के पौधों की जडों के आस-पास की गीली मिट्टी को खोद कर केंचुए निकाले जाते हैं । केंचुओं के "क्लाइटेलम" के आस-पास काँटा फँसाया जाता है ।

एक बार में एक प्राणी को ही 'बेट' के रूप में लगाया जाता है ।

अन्य जलीय प्राणियों को पकडने की विधि

मछली के अलावा सीपी (स्थानीय नाम सीपला), केकडे (स्थानीय नाम कछला, कतला) आदि भी खाने के लिये पकडे जाते हैं । । इन प्राणियों को धीरे-धीरे पानी में चलते हुए हाथ से ही बिना किसी उपकरण की मदद से पकड लिया जाता है (यद्यपि कछुओं को खाने की सूचना नहीं है परन्तु कुछ लोग दवाओं में प्रयोग करने के लिये इनको भी बिना किसी उपकरण की मदद के ही पकड लेते हैं) ।

भण्डारण

1· जीवित मछलियाँ

पोहरी में मछलियाँ तब तक जीवित और ताजी बनी रहती हैं जब तक कि पोहरी पानी में पड़ी रहती है । पानी में डूबे रहने से मछलियों में श्वसन जारी रहता है जिससे वे मर नहीं पातीं । आवश्यकतानुसार मछलियाँ पोहरी से निकाली जाती हैं तथा शेष उसी में पडी रहती हैं ।

2. मृत मछलियाँ

पकडी गई मछलियों को भूमि पर पटक कर फैला दिया जाता है तथा उन पर सूखी घास की एक पतली परत जमा दी जाती है । घास में आग लगा कर मछलियों की हल्की सिंकाई की जाती है । सिंकी हुई मछलियों को बाँस की बनी टोकरी में रख कर सरसों का तेल डाल कर ऊपर-नीचे हिला-डुला कर तेल से चुपड दिया जाता है तथा धूप में सुखा लिया जाता है । पाँच सात दिन सूखने के बाद पुन: सरसों के तेल से चुपड़ जाता है तथा बाँस की टोकरियों में संग्रह कर लिया जाता है । इस तरह सुखाई मछलियाँ एक माह तक पका कर खाने में काम में लाई जाती हैं । प्रायः बड़ी मछलियों को पकने के दिन ही खा लिया जाता है । केवल छोटी मछलियों को ही सुखा कर भण्डारित किया जाता है ।

परिणाम तथा विवेचना

आदिवासी क्षेत्रों में प्रचलित मत्स्य आखेट के तरीकों का अध्ययन करने पर निम्नलिखित निष्कर्ष निकलते हैं :

1· प्रचलित परम्परागत तरीकों में स्थानीय रूप से उपलब्ध सामग्री का ही उपयोग किया कया जाता है । सिर्फ "औद" की नौक के लोहे के हुक को तथा मछली पकडने के काँटे को छोड किसी भी उपकरण में धातु का प्रयोग नहीं किया जाता । काँटे की डोरी को छोड कर प्लास्टिक निर्मित वस्तुओं का भी उपयोग नहीं किया जाता ।

2· अलग-अलग समय में नदियों की चौडाई, पानी की गहराई की भिन्न-भिन्न परिस्थतियों में भिन्न-भिन्न पद्धतियाँ अपनाई जाती हैं जो यह दर्शाता है कि मत्स्य-आखेट तकनीकों का इन जातियों को बहुत अच्छा ज्ञान है ।

3. वानस्पतिक मीन-विषों का ज्ञान आदिवासियों के वानस्पतिक ज्ञान की श्रेष्ठता प्रमाणित करता है। ये विष, रासायनिक विषों की तुलना में सस्ते, सुलभ, कम घातक तथा कम प्रदूषणकारी होते हैं।

4. मछलियों का आखेट केवल घरेलू उपयोग के लिये किया जाता है, शहरों में बेच कर धन कमाने के लिये नहीं। आदिवासियों की यह प्रवृत्ति संरक्षण के सिद्धान्त से मेल खाती है।

वढती जनसंख्या की आवश्यकता को पूरा करने के लिये ज्यादा मछलियाँ पकडने का सिलसिला जारी है। प्राय: बहुत छोटे आकार तक की मछलियों को भी नहीं छोडा जाता जिससे न केवल आने वाले साल के लिये कम मछलियाँ बचती हैं बल्कि प्रौढ मछलियों के अत्यधिक दोहन से प्रजनन प्रक्रिया पर विपरीत प्रभाव पडता है। मछलियों के अत्यधिक आखेट से कई मछलियाँ खाने वाले पक्षियों व अन्य प्राणियों के वितरण पर भी प्रभाव पड़ सकता है।

गर्मियों में जब जलाशयों में बहुत थोडा पानी बच जाता है प्राय: एक नाली बना कर बचे खुचे पानी को व्यर्थ बहा दिया जाता है तथा पीछे बचे कीचड से अधिकांश मछलियाँ पकड ली जाती हैं। यह स्थिति मछलियों के अस्तित्व के लिये घातक है क्योंकि वर्षा ऋतु के आगमन तक प्रजनन योग्य मछलियों की संख्या बहुत कम रह जाती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक उन सभी वन-कर्मियों का आभारी है जिन्होंने आदिवासी क्षेत्रों में मत्स्य आखेट सम्बन्धी जानकारी उपलब्ध कराई। लेखक श्री रजा तहसीन का भी आभारी है जिन्होंने दक्षिणी राजस्थान की मत्स्य-आखेट प्रवृत्तियों की जानकारी दी। डॉ० प्रभाकर जोशी, वैज्ञानिक, वानस्पतिक उद्यान, पाछा-पालोड (केरल) द्वारा मीन विषों को जानकारी उपलब्ध कराने एवं एथनोजूलॉजी सम्बन्धी तथ्यों पर अध्ययन करने हेतु प्रेरित करने के लिए उनका हार्दिक आभार। लेखक श्री सीताराम खण्डेलवाल का भी बहुत आभारी है जिन्होंने मीन-विषों पर जानकारी दी।

निर्देश

1. जोहल, एम० एस०, चहल, जे० एस० तथा टण्डन, के० के० जे० बी० एन० एच० एस० 1993 90 (3) : 404-411.

2. जोशी, पी० : (एथनोबॉटनी ऑफ अरावलीज) पी० एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्व-विद्यालय जयपुर, 1987.

3. डेनियल, जे० सी० : जे० बी० एन० एच० एस०, 1993 60 (3) : 506-522.

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

जनसंख्या आनुवंशिकी तथा जीन आवृति की गणना

चतुर्भुज साहु

मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कालेज, गिरिडीह, (बिहार)-815301

[प्राप्त—अप्रैल 19, 1994]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में जनसंख्या आनुवंशिकी तथा जीन आवृति की गणना पर विशेष बल दिया गया है। हार्डी-वीनवर्ग नियम को स्पष्ट रूप से समझने के लिए किसी जनसंख्या में समयुग्मजी (AA अथा aa) और असमयुग्मजी (Aa) सदस्यों के बीच 9 प्रकार के यौन-सम्बन्धों को स्थापित करते हुए दर्शाया गया है और पाया गया कि अनियमित यौन सम्बन्ध वाली जनसंख्या की प्रत्येक आने वाली पीढ़ी में $p^2+2pq+q^2$ के रूप मे सदैव एक-सा बना रहेगा और ऐसे ही सम्बन्धों के अन्तर्गत इस जीन-स्थली के लिए उक्त प्रकार की जनसंख्या में जीनी संतुलन स्थापित हो जायेगा, परन्तु नियमित यौन सम्बन्ध में यह नियम लागू नहीं हो पाता है।

बहु एलील सिद्धांत के द्वारा ABO रक्त वर्ग की आधारभूत तीन एलील-A,B,O की जीन-स्थली और ABO रक्त की जीन-आवृति की गणना की गई है क्योंकि रक्त वर्ग के अध्ययन में सबसे महत्वपूर्ण तथ्य जीन आवृति की गणना है। जीन आवृति की गणना के लिए जीन-प्ररूप तथा व्यक्त-प्ररूप की सम्भावित स्थितियों को भी दर्शाया गया है। जीन आवृति के द्वारा बहु-एलील सिद्धांत की जाँच कुछ विशेष जनसंख्याओं से की गई है।

हार्डी-वीनवर्ग समीकरण $p^2+2pq+q^2$ के आधार पर स्वादक की एलील आवृति की भी गणना की गई है और पाया गया है कि इस केस में भी यह संतुलन नियम लागू होता है।

अंत में, भारत के विभिन्न क्षेत्रों में पाई जाने वाली जन-जातियों में ABO जीन आवृति दर्शायी गयी है जिसमें दक्षिण भारत से बिल्कुल विपरीत स्थिति उत्तरी भारत की जन-जातियों में पायी गयी है। बिहार की जन-जातियों (संथाल, मुण्डा, हो एवं उराँव) में p एवं q जीन आवृति में महत्वपूर्ण एवं स्मरणीय वृद्धि पायी गयी है।

Abstract

Populatlon genetics and estimation of gene frequency. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih, Bihar.

In the present paper emphasis has been given on the study of population genetics and estimation of gene frequency. Hardy-Weinberg discovered that an equilibrium is established between frequencies of alleles in a random mating population.

Gene frequency is considered to be the important attribute of a population. It is defined as proportions of different alleles of a gene in a population, and in a particular generation gene frequencies will depend upon their frequencies in preceding generation. Gene frequencies also depend on proportion of various genotypes in total population.

Important aspect in the study of Blood groups is the estimation of gene frequencies because they are useful in classifying population, in tracing past migration and mixing with different races. In this paper an attempt has been made to estimate the gene frequencies in terms of Blood group and Phenylthiocarbamide taste. Theory of multiple allele has been tested by means of gene frequency.

A comparative study on the temporal changes in the frequency distribution of the *ABO* genes among the Indian tribes of different regions has been presented. It has been observed that there is a great difference in frequencies of p, q and r between the tribes of South India and North India. In South India, there is decrease of frequencies p and q genes and increase of the frequency of r gene while in North India an appreciable increase of the frequencies of p and q at expenses of r gene have been observed.

शारीरिक मानव विज्ञान के क्षेत्र में मानव आनुवंशिकी (ह्यूमेन जेनेटिक्स) का महत्वपूर्ण स्थान है क्योंकि इसके बिना उद्विकासीय अध्ययन सम्भव नहीं है। आनुवंशिकीय अध्ययन वंशागति के सभी पक्षों पर विचार करता है-जैसे 4 जीन तथा उसका आकार व प्रकार, क्रोमोसोम पर उसकी स्थिति, क्रोमोसोम का आकार-प्रकार, उनका प्रतिवलन, युग्मन तथा विभाजन, कोशिकाओं का निर्माण तथा विभाजन आदि आनुवंशिकी की नींव डालने वाले ग्रिगर-मेंडेल हैं जिन्हे आनुवंशिकी का जनक कहा जाता है। आनुवंशिकीय सिद्धांत को मानव के संदर्भ में प्रयुक्त कर अध्ययन किया जा रहा है परन्तु विशेष शर्तों के आनुवंशिकीय अध्ययनों के लिए मानव उपयुक्त सामग्री नहीं है क्योंकि मानव में गर्भाधारण काल की अवधि अधिक होती है। उन्हें सरलतापूर्वक प्रयोगशाला में रखकर उनपर नियंत्रण नहीं किया जा सकता है, सामाजिक बन्धन के कारण मनचाहे तरीके से स्त्री-पुरुष को मिला नहीं सकते हैं, मानव की जीवन अवधि अधिक होती है, परन्तु उन ऐसे परिवारों के अध्ययन से जिनमें तीन-चार पीढ़ियाँ वर्तमान होती हैं इस प्रकार की पुष्टि की जा सकती है। प्रारम्भ में विभिन्न लक्षणों का अध्ययन करने के लिए

वंशावली पीढ़ी का प्रयोग किया जाता था, परन्तु आधुनिक युग में आनुबंशिकीय विश्लेषण के लिए 'सेल कल्चर' एवं आणवीय जैविक विधियों को प्रयोग में लाया जाता है । अतः वंशागत विशेषताओं के अध्ययन को ही आनुवंशिकी कहते हैं ।

जीन वह भौतिक संरचना है जो आनुवंशिक विभव को एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी में संचरित करती है । जीन एक धागे के रूप में एक-दूसरे से जुडे हुए रहते हैं जिसे क्रोमोसोम कहते हैं । एक क्रोमोसोम में अनेक जीन होते हैं । क्रोमोसोम में एक जीन की स्थिति को 'जीनी-स्थली' कहते हैं । कोई भी जीन अकेला नहीं होता है । बह अपने एक वैकल्पिक साथी के साथ होता है । इस जोडे के साथी जीनों को 'एलील' (alleles) कहते हैं । यदि किसी बच्चे को अपनी माता और पिता दोनों से एक स्थली पर एक ही प्रकार के दो एलील मिलते हैं तो उसे उस जीन के लिए समयुग्मजी (होमोजायगस) कहा जाता है परन्तु ठीक इसके विपरीत दो विभिन्न प्रकार के एलील प्राप्त होते हैं तो असमयुग्मजी (हेटेरोजायगस) कहा जाता है । अतः वंशागति में प्राप्त हुआ एलील युग्म उस स्थली के लिए उसका जीन-प्ररूप (जीनोटाइप) तथा यह जिस रूप में आनुवंशिकीय सामग्री व्यक्त होती है उसे व्यक्त-प्ररूप (फीनोटाइप) कहा जाता है ।

मानव क्रोमोसोम

सर्वप्रथम टिजियों एवं लेलव[1] ने एक विधि प्रतिपादित की जिसके कारण मानव में निश्चित क्रोमोसोम ($2n=46$) की संख्या का पता चला । इसके बाद क्रोमोसोम की आकारिकी तथा उनके सेन्ट्रोमेयर की स्थिति के आधार पर प्रत्येक क्रोमोसोम को पहचान कर उन्हें 7 समूहों में विभाजित किया गया । इस वर्गीकरण पद्धति को 'कैरियोटाइपिंग' कहते हैं । यह वर्गीकरण सर्वसम्मति से 1990 में स्वीकार कर लिया गया । इसके अनुसार पहले वर्ग A में 3, दूसरे वर्ग B में 2, तीसरे वर्ग C में X सहित 8, चौथे वर्ग D में 3, पाँचवे वर्ग E में 3, छठे वर्ग F में 2 तथा सातवें वर्ग G में Y सहित 3 आते हैं । इस प्रकार के सामान्य कैरियोटाइप के अलावा कुछ अन्य प्रकार के क्रोमोसोम भी पाये जाते हैं जो प्रायः जन्मजात शरीरिक या मानसिक रूप से असामान्य व्यक्तियों में पाये जाते हैं । मानव में क्रोमोसोमों की असामान्यतायें दो प्रकार की हो सकती हैं—(i) सामान्य क्रोमोसोमों की संख्या का कम या अधिक होना तथा (ii) किसी एक या एक से अधिक क्रोमोसोम की संरचना का बदल जाना ।

कोशिका-विभाजन के समय किसी कारणबश तर्कुतन्त्र में किसी प्रकार की अड़चन आ जाने से प्रायः एक या एक से अधिक क्रोमोसोम अपनी निश्चित दिशा में नहीं जा पाते हैं जिसके परिणामस्वरूप एक कोशिका में कम तथा दूसरी में अरिरिक्त क्रोमोसोम चले जाते हैं। कम क्रोमोसोम वाली एकगुण सूत्री (मोनोसोमिक, ($2n=45$)) तथा अतिरिक्त क्रोमोसोम वाली त्रिगुण सूत्री (ट्राइसोमी, ($2n=47$)) कहलाती है । एक गुणसूत्री कोशिकाएँ प्रायः नष्ट हो जाती हैं जबकि कोशिकाएँ अतिरिक्त क्रोमोसोम की उपस्थिति को सहन तो कर लेती है लेकिन उनकी कमी असहज हो जाती है ।

आॅटोजोमल ट्राइसोमी (त्रिगुण सूत्रता)

मानव में त्रिगुण सूत्रता की रिपोर्ट सर्वप्रथम लिज्यून एवं अन्य[1a] ने प्रस्तुत की। उनकी इस खोज ने आनुवंशिकीय समस्याओं पर विशेष प्रभाव डाला है। त्रिगुण सूत्रता निम्नलिखित नामों से जानी जाती है—(i) ट्राइसोमी-21 (*G* वर्ग ट्राइसोमी, (ii) 13-15 (*D* वर्ग ट्राइसोमी) तथा (iii) ट्राइसोमी 17 या 18 (*E* वर्ग ट्राइसोमी)।

***G*-वर्ग ट्राइसोमी**

साधारणत: *G*-वर्ग ट्राइसोमी ही पाया जाता है क्योंकि क्रोमोसोम 21 छोटा होता है और लिथेलिटी उत्पन्न नहीं करता है। इस सिन्ड्रोम के प्रभाव से पुरुष की उर्वरता लगभग नष्ट ही हो जाती है परन्तु कुछ स्त्रियाँ उर्वर सिद्ध हुई है। इनमें से पाँच असामान्य तथा सात सामान्य बच्चे थे (सुटन[२])।

***G*-वर्ग ट्राइसोमी**

इस ट्राइसोमी में क्रोमोसोम 13, 14 या 15 में से कोई भी प्रभावित होता लेकिन स्पष्ट रूप से कुछ कहना मुश्किल है कि इन तीनों में से कौन सा क्रोमोसोम प्रभावित होता है। इसके प्रभाव से हृदय दोष, अनेत्रता, पोलिडक्टायली, मानसिक असंतुलन, खन्ड तालु (क्लेफ्ट पैलेट) आदि उत्पन्न होते हैं।

***E*-वर्ग ट्राइसोमी**

इसमें 18वाँ (या 17वाँ) क्रोमोसोम प्रभावित होता है। इसके प्रभाव के छोटा मुँह, कान की विकृतियाँ, जन्मजात हृदय विकृतियाँ, केन्द्रीय तंत्रिका तंत्र दोष, अंगुलियों के मुडने में विकृति, नाभि हार्निया, छोटा मेंडिबुल आदि उत्पन्न होते हैं। इससे प्रभावित शिशु कुछ ही महीना तक जीवित रहता है।

लिंग क्रोमोसोमों की असमानताएँ

बार तथा वर्ट्रम[3] ने यह खोज की कि स्त्रियों के अधिकांश केन्द्रक में केन्द्रक कला के भीतरी ओर एक रंजन पिंड होता है जो पुरुषों में नहीं होता। जिन व्यक्तियों में यह पिंड 30 प्रतिशत या उससे अधिक कोशिकाओं में पाया जाता है उन्हें लिंग क्रोमेटिन धनात्मक कहा जाता है तथा 30% से कम वाले व्यक्ति लिंग क्रोमेटिन ऋणात्मक होता है। अत: पुरुष—*ve* तथा स्त्रियाँ +*ve* होती हैं। क्लाइनफेल्टर्स सिन्ड्रोम वाले व्यक्ति व्यक्त-प्ररूप होते हैं लेकिन उनमें कुछ न कुछ गुण स्त्री का भी पाया जाता है। उनकी भुजा तथा पैर औसत से कुछ लम्बी, जननेन्द्रियाँ अल्पविकसित तथा शरीर पर बाल बहुत कम होते हैं। इनमें अधिकांशत: कम बुद्धि वाले होते हैं। इससे प्रभावित जो रोगी बाहर से देखने पर सामान्य लगता है उनकी उर्वरता कम होती है। ऐसे व्यक्ति लिंग-क्रोमेटिन धनात्मक होते हैं तथा *XX* गठन की ओर संकेत करते हैं। इनमें 47 क्रोमोसोम होते हैं। जेकब्स तथा अन्य[4] ने इनमे *XXY*

लिंग क्रोमोसोम का गठन पाया है जिसमें Y क्रोमोसोम सामान्य होता है । सुटन[5] ने बताया कि इनकी कोशिकाओ में लिंग क्रोमेटिन होतां है जिससे पता चलता है कि दोनों ही बड़े क्रोमोसोम XX क्रोमोसोम है ।

टर्नर-सिन्ड्रोम वाले व्यक्ति व्यक्त-प्ररूप में स्त्री होते हैं लेकिन उनकी डिम्ब-ग्रन्थियों का पूर्ण विकास नहीं होता । ऐसी स्त्रियों का कद छोटा, गर्दन में दोनों ओर ऊपर से नीचे की ओर विशेष बढ़ी हुई त्वचा तथा उनकी बुद्धि कम होती है । यह लिंग-क्रोमेटिन ऋणात्मक होती है । इनमें केवल 45 क्रोमोसोम होते हैं क्योंकि स्त्रियों में Y क्रोमोसोम नहीं होता । इनमें चार जोडे ऐक्रोसेन्ट्रिक क्रोमोसोम होते हैं । इनमें एक युग्म XO होता है अर्थात् X का साथी क्रोमोसोम अनुपस्थित रहता है ।

ऱ्वंप्रथम कुमिन्स[6] ने डाउन सिन्ड्रोम वाले रोगियों के अंगुली एवं हथेली में कुछ निश्चित प्रकार के त्वचीय प्रतिरूप का वर्णन किया । उसके बाद से इन रोगियों के त्वचीय प्रतिरूपों पर बहुतेरे कार्य हो रहे हैं । हम जानते हैं कि त्वचीय प्रतिरूप भ्रूण के तेरहवें सप्ताह में ही किसी-न-किसी प्रकार का रूप ले लेती है (साहु[7,8,9]) इसलिए इसके बाद त्वचीय प्रतिरूप एवं अन्य लक्षणों में किसी भी प्रकार का परिवर्तन सम्भव नहीं है । मानव में क्रोमोसोमी असामान्यताओं से सम्बन्धित अध्ययनों के आधार पर पाया गया है कि इनके द्वारा भ्रूण में ही त्वचीय प्रतिरूप एवं अन्य लक्षणों के निर्माण एवं विकसित होने में प्रभावित होता है ।

डाउन सिन्ड्रोम रोगियों के त्वचीय प्रतिरूपों की विशेषताएँ हैं—

(i) कम से कम एक डिस्टल एक्सियल रेडियस

(ii) कम से कम एक हथेलीय IIIrd अंतर-अंगुलीय लूप

(iii) कम से कम एक पूर्ण सिमियन क्रीज

(iv) पाँचवे अंगुली में कम से कम एक अकेला क्रीज

(v) अंगुलियों में अलनर लूप की अधिक आवृति

(vi) तलवे के हेलुकल क्षेत्र में आर्च टिबियल या छोटा लूप डिस्टल आदि

लू[10] ने अंगुली के त्वचीय प्रतिरूपों से मंगोलिज्म की पहचान के लिए पृथक कार्यों का निर्माण करने की चेष्टा की । युचिदा एवं अन्य[11], अल्टर[12] ने E वर्ग ट्राइसोमी-(18) रोगी के अंगुली में साधारणतः आर्च प्रतिरूप 6% से अधिक पाया है । इसके साथ ही साथ हथेली में सिमियन क्रीज पाया गया है । D वर्ग ट्राइसोमी है । सिमियन क्रीज के साथ ही साथ *atd* कोण का मान अधिक मिला है तथा तलवे के हेलुकल क्षेत्र में आर्च फिबुलर पायी गयी है ।

ट्रान्सलोकेशन डाउन सिन्ड्रोम

इस सिन्ड्रोम में क्रोमोसोम की संख्या 46 होती है क्योंकि अतिरिक्त क्रोमोसोम दूसरे ऑटोजोमल

क्रोमोसोम में चला जाता है। ट्रान्सलोकेशन 21 नम्बर क्रोमोसोम और 13-15 (*D*) वर्ग में से कोई एक के बीच, या 21 नम्बर क्रोमोसोम के दो संख्याओं के बीच या 21 या 22 नम्बर के बीच पायी जाती है।

अनेक लैंगिक दोषों में से क्लाइन्फेल्टर्स सिन्ड्रोम तथा टर्नर सिन्ड्रोम आदि का अध्ययन विशेष रूप से हुआ है। इन रोगियों के त्वचीय प्रतिरूपों का भी अध्ययन किया गया है। टर्नर सिन्ड्रोम रोगियों में (*XO, XO/XXi; XO/XY; XX/XXd, XXi, Xy*) हथेली की एक्सियल ट्राइरेडियस का स्थान बदला हुआ रहता है (उचिदा एवं सोल्टन[13], पेनरोज[14]) तथा सिमियन क्रीज की अधिकतम आवृति पाई गयी है। होल्ट[15] एवं अल्टर[16] ने होर्ल की अधिकतम आवृति; *atd* कोण तथा *S*-हाइपोथीनर प्रतिरूप का अधिकतम मान, *b* ट्राइरेडियस का अलनर की ओर खिसकने के कारण *a—b* रीज काउन्ट का अधिकतम मान आदि पाया है।

पेनरोज[17] ने क्लाइन्फेल्टर्स सिन्ड्रोम *XXY* की अंगुलियों में रीज काउट का मान कम तथा आर्च की अधिक प्रवृति पायी है। उचिदा तथा अन्यों[18] ने *XXYY, XYY, XXXYY* रोगियों में अन्य प्रकार के सिन्ड्रोमों की तुलना में आर्च प्रतिरूप की अधिकतम आवृति पायी है।

इनबोर्न एरर ऑफ मेटाबोलिज्म (चयापचयी अन्तः जातत्रुटि)

1909 में अंग्रेज फिजिसियन आर्किबोल्ड ई० गैरोड की पुस्तक "इनबोर्न एरर ऑफ मेटाबोलिज्म" प्रकाशित हुई। इस पुस्तक में इन्होंने मानव में हस्तांतरित होने वाले विभिन्न शारीरिक असामान्यताओं का वर्णन किया और यह सिद्धांत प्रतिपादित किया कि कुछ विशिष्ट एंजाइमों की कमी हो जाने से कुछ असामान्यताएँ विकसित होती हैं। गैरोड के कार्य को उस समय के आनुवंशिकी वेत्ताओं द्वारा स्वीकार नहीं किया गया क्योंकि उस समय वे लोग जोनेटिक अनुपान एवं जीन का स्थान पता लगाने में ही रुचि ले रहे थे। परन्तु जार्ज बीडले एवं ई० एल० तुलम के न्युरोस्पोश के एन्जाइमों में किये गये शोध कार्य (जिसके लिए 1950 में उन्हें नोबेल पुरस्कार मिला) ने लोगों को जीन और एन्जाइम की ओर आकर्षित किया। वैज्ञानिक खोजों ने पाया कि मानव में एन्जाइम के माध्यम से होने वाली प्रतिक्रियाओं का एक श्रृंखला है जिनमें एमिनो एसिड-फिनाइलएलेनीन की टूटने की क्रिया भी शामिल है।

एलकेप्टोनयूरिया

गैरोड ने जैवरासायनिक उत्परिवर्तन (बायोकेमिकल म्युटेशन) या इनबोर्न एरर ऑफ मेटाबोलिज्म को एलकेप्टोनयूरिया के संदर्भ में वर्णन किया। एलकेप्टोनयूरिया पेशाब में असामान्यरूप से बनने वाला होमोजेनटिसिक एसिड है। इसमें एलकेप्टोन (टायरोसिन का एक व्युत्पन्न) होता है तथा यह दुर्लभ दुर्गुण है।

इस बीमारी से ग्रसित लोगों में होमोजेनटिसिक एसिड ऑक्सीडेस नहीं होता है। इसके साथ ही

साथ होमोजेनटिसिक एसिड मेलिल एसेटोऐसीटिक एसिड में नहीं बदल सकता है । अतः होमोजेनटिसिक एसिड़ पेशाब में जमा हो जाता है जो आगे चलकर कार्टिलेज तथा शरीर के अन्य हिस्सों में गहरे रंग के रूप में विकसित हो जाता है । कान, आँख की एसक्लेरा, गठिया आदि में पहचाना जा सकता है ।कभी-कभी दर्द असहनीय हो जाता है । गैरोड ने इसे अप्रबल म्युटेशन के कारण बताया ।

फिनाइलकिटोनयूरिया

यह दुर्गुण भी एक अप्रबल एलील पर आधारित है तथा दुर्लभ भी है । इन एलीलों के प्रभाव मे चयापचयी असामान्यता आ जाती है । यह एक स्थिति है जिसमे फिनाइल एलेनीन हाइड्रोक्सीलेस एन्जाइम की कमी से फिनाइल एलेनीन का टायरोसिन में रूपान्तरण बन्द हो जाता है । यह एन्जाइम साधारणतः यकृत में पाया जाता है । यह रोग एलकेप्टोनयूरिया से ज्यादा घातक है क्योंकि इसमें व्यक्ति के मानसिक विकास पर प्रभाव पड़ता है। प्रभावित व्यक्तियों में एक प्रकार की बुद्धिहीनता आ जाती है ऐसे व्यक्ति में सन्तान-उत्पत्ति की क्षमता बहुत ही कम होती है । प्रभावित व्यक्ति के माता-पिता वाह्य रूप से सामान्य होते हुए भी इस एलील में असमयुग्मजी होते हैं परन्तु इन्हें इस बात का ज्ञान होता है । यहाँ म्युटेशन के द्वारा रासायनिक अभिक्रिया नहीं हो पाती है तथा यह जीन नियंत्रण के अधीन होती है । फिनाइलकिटोनयूरिया में दो प्रकार की चयापचयिक रुकावटें होती हैं-प्राथमिक और द्वितीयक । प्राथमिक रुकावट मे एन्जाइम फिनाइल एलेनीन डीहाइड्रोक्सीलेस की कमी से फिनाइल एलेनीन का टायरोसिन में रूपान्तरण बन्द हो जाता है । द्वितीय रुकावट में एन्जाइम के गहरे रंग में बनने के कारण अधिक घातक प्रभाव पड़ता है ।

एलबिनिज्म

इस केस में एन्जाइम की कमी से टायरोसिन का मेलेनीन रंग मे बदलना बन्द हो जाता है । इससे प्रभावित होने पर व्यक्ति के बाल रंगहीन, चमड़ा गुलाबी. गुलाबी इरिसेस, प्युबिस लाल एवं देखने की कम क्षमता आदि लक्षणों से ग्रसित हो जाते हैं ।

टायरोसिनोसिस

इस केस मे टायरोसिन मेटाबोलाइट पेशाब में उत्सर्जित होता है ।

जनसंख्या आनुवंशिकी

आनुवंशिकीय सिद्धांत के अन्तर्गत जीन की वंशागति मुख्य विषय-वस्तु है जो मेंडेलियन सिद्धांत के द्वारा प्रतिपादित होती है परन्तु इन जीनों के संवाहकों की व्यक्तिगत आवृत्ति कई कारकों पर आधारित होती है जिसके अन्तर्गत जनसंख्या के आकार एवं अन्य कई कारकों में कोई विशेष जीन आवृति भी शामिल है । आनुवंशिकीय सिद्धांत मानव पर भी लागू किया जा सकता है बशर्ते कि हमें (i) प्राकृतिक जनसंख्याओं में जीन-वितरण तथा जीन-प्रारूपों या जीन-संरचना का ज्ञान न हो तथा (ii) जिस जनसंख्या मे यौन-सम्बन्ध के लिए कोई नियम न हो । इसलिए जनसंख्या आनुवंशिकी का मुख्य उद्देश्य किसी भी

जनसंख्या की अनजानी जीनी संरचना का निर्धारण तथा उस जीनी संरचना को बनाये रखने या उसे परिवर्तित करने वाले कारकों का अध्ययन करना है। जीनी संरचना या जीन आवृति सांख्यिकीय गणना के आधार पर प्राप्त की जाती है। किसी भी जनसंख्या में किसी एक विशेषक से युक्त सभी व्यक्तियों की गणना करना सम्भव नहीं है इसलिए नमूने के तौर पर हम कुछ ऐसे व्यक्तियों को चुन लेते हैं और फिर सांख्यिकीय नियमों के आधार पर गणना की जाती है। इस प्रकार की गणना से हमें जनसंख्या विशेष में ऐसे विशेषक से युक्त व्यक्तियों के प्रतिशत का पता चल जाता है।

हार्डी-वीनवर्ग नियम

इस शताब्दी के प्रारम्भ तक तथा मेंडेल की खोज के बाद यह माना जाने लगा था कि एक जनसंख्या में किसी विशेषक के लिये उपस्थित प्रबल जीन कुछ पीढ़ियों के बाद अप्रबल जीनों की तुलना में अधिक हो जायेगी और जीनी संतुलन को अव्यवस्थित कर देगी। परन्तु बाद में यूले एवं यंग ने तर्क दिया कि किसी भी जनसंख्या में प्रबल और अप्रबल एलील 3 : 1 के अनुपात में स्थायी हो जायेगी। इस प्रकार की परिकल्पना को बाद में गलत साबित किया गया। सन् 1908 ई० में अंग्रेज गणितज्ञ जी० एच० हार्डी तथा जर्मन कायचिकित्सक डब्ल्यू० वीनवर्ग ने स्वतंत्र रूप से सम्भावित सिद्धांत को मेंडेल के नियमों पर लागू करते हुए यह सिद्ध कर दिया कि एक पीढ़ी के अनियमित यौन-सम्बन्ध (रैण्डम मेटिंग) के बाद जीन-आवृति तथा जीन-प्ररूप एक संतुलित अवस्था को प्राप्त कर भविष्य के लिए स्थिर हो जायेंगे। इस खोज को **'हार्डी-वीनवर्ग नियम'** कहते हैं।

हम जानते हैं कि जब Aa जीन वाले दो असमयुग्मजी व्यक्तियों को यौन सम्बन्ध कराया जाता है तो वे । AA : 2 Aa : । aa के रूप में पृथक होते है। इस अवस्था में A एवं a की आवृति बराबर होती है जो 0·5 के बराबर है, पर किसी खास जीन की दो एलीलों की आवृति हर समय एक जैसी नहीं होती है इसलिए अनियमित यौन-सम्बन्ध वाली जनसंख्या में 1 : 2 : 1 का अनुपात हर समय प्राप्त नहीं होता है।

मान लें कि दो एलील A प्रबल और a अप्रबल हैं,

p प्रबल एलील A की आवृति तथा q अप्रबल एलील a की आवृति है

(जहाँ $p+q=1$)

इस स्थिति मे अनियमित यौन-सम्बन्ध से निम्न परिणाम मिलता है—

स्पर्म (sperm)

ओवम (ovum)	A (p)	a (q)
A (p)	AA (p^2)	Aa (pq)
a (q)	Aa (pq)	aa (q^2)

अनियमित यौन-सम्बन्ध का परिणाम

सारणी 1

अनियमित यौन-सम्बन्ध से उत्पन्न संतानों के जीन-प्ररूप

पित्रीय यौन सम्बन्ध ♂×♀	यौन सम्बन्धों की आवृत्ति	संतानों की आवृत्ति		
		AA	Aa	aa
$AA \times AA$	$p^2 \times p^2 = p^4$	p^4	—	—
$AA \times Aa$ $Aa \times AA$	$p^2 \times 2pq = 4p^3q$	$2p^3q$	$2p^3q$	—
$AA \times aa$ $aa \times AA$	$p^2 \times q^2 = 2p^2q^2$	—	$2p^2q^2$	—
$Aa \times Aa$	$2pq \times 2pq = 4p^2q^2$	p^2q^2	$2p^2q^2$	p^2q^2
$Aa \times aa$ $aa \times Aa$	$2pq \times q^2 = 4pq^3$	—	$2pq^3$	$2pq^3$
$aa \times aa$	$q^2 \times q^2 = q^4$	—	—	q^4
जोड़ने पर	$p^4 + 2p^3q + 2p^3q$ $+ p^2q^2 + p^2q^2$ $+ 4p^2q^2 + 2pq^3$ $+ 2pq^3 + q^4$ $= p^2(p^2 + 2pq$ $+ q^2) + 2pq(p^2$ $+ 2pq + q^2)$ $+ q^2(p^2$ $+ 2pq + q^2)$ $= p^2 + 2pq$ $+ q^2 = (p$ $+ q)^2 = 1$	$p^4 + 2p^3q + p^2q^2$ $= p^2(p^2 + 2pq$ $+ q^2)$ $= p^2(p+q)^2$ $= p^2(1)^2$ $= p^2$	$2p^3q$ $+ 4p^2q^2$ $+ 2pq^3$ $= 2pq(p^2$ $+ 2pq$ $+ q^2)$ $= 2pq(1)^2$ $= 2pq$	p^2q^2 $+ 2pq^3$ $+ q4$ $= q^2(p^2$ $+ 2pq$ $+ q^2)$ $= q^2(1)^2$ $= q^2$

सारणी 2

विभिन्न प्रकार के यौन सम्बन्धों से उत्पन्न जीन-प्ररूपों का वितरण

पित्रीय यौन सम्बन्ध ♂×♀	उत्पन्न संतानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप (% में)		
	AA	*Aa*	*aa*
AA×*AA*	100 (4)	—	—
AA×*Aa*	50 (2)	50 (2)	
AA×*aa*	—	100 (4)	—
Aa×*AA*	50 (2)	50 (2)	—
Aa×*Aa*	25 (1)	50 (2)	25 (1)
Aa×*aa*	—	50 (2)	50 (2)
aa×*AA*	—	100 (4)	—
aa×*Aa*	—	50 (2)	50 (2)
aa×*aa*	—	—	100 (4)
योग	(9)	(18)	(9)

पित्रों में *AA*, *Aa* तथा *aa* जीन प्ररूप एक तिहाई है लेकिन उनकी संतानों में एक चौथाई *AA*, आधे *Aa* तथा एक चौथाई *aa* है, अर्थात् वह 9 : 18 : 9 के अनुपात में हैं।

सारणी 3

समगुणी यौन-सम्बन्ध से उत्पन्न सन्तानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप

पित्रीय यौन सम्बन्ध ♂×♀	उत्पन्न सन्तानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप		
	AA	*Aa*	*aa*
AA×*AA*	4	—	—
Aa×*Aa*	1	2	1
aa×*aa*	—	—	4
योग	5	2	5

अतः अनियमित यौन-सम्बन्ध से तीन जीन-प्ररूप *AA*, *Aa* एवं *aa* $p^2 : 2pq : q^2$ के अनुपात में मिलते हैं। यह अनुपात हार्डी-वीनवर्ग जीन संतुलन नियम $p^2(AA)+2pq(Aa)+q^2(aa)$ के ही अनुरूप है। इस प्रकार के अनियमित यौन-सम्बन्ध से एक पीढ़ी के बाद यही समीकरण प्राप्त होता रहेगा यदि इनमें म्युटेशन, वरण, या माइग्रेशन आदि प्रभावित नहीं करते हों।

इसे और भी स्पष्ट रूप से समझने के लिए हम ऐसी जनसंख्या पर विचार करें जिनमें एलील रूप में दो ऐसे जीन प्रचलित हों जिनमें से एक प्रबल (*A*) तथा दूसरा अप्रबल (*a*) हो। ऐसी स्थिति में कुछ सदस्य समयुग्मजो (*AA*) तथा *aa*) तथा कुछ सदस्य असमयुग्मज (*Aa*) होंगे। इस आधार पर नौ प्रकार के यौन-सम्बन्ध स्थापित किये जा सकते हैं तथा उनसे उत्पन्न सन्तानों के जीन प्ररूप का अनुमानित प्रतिशत भी निर्धारित किया जा सकता है जो आने वाली पीढ़ियों में अपनी स्थिति बनाये रहेगा।

उपर्युक्त सारणी से यह पता चलता है कि दोनों ही दशाओं में प्रबल जीन *A* तथा अप्रबल जीन *a* का अनुपात बराबर है। पित्रीय जीन प्ररूपों पर हम विचार करते हैं तो पाते हैं कि उनमें से एक तिहाई *AA*, एक तिहाई *Aa* तथा एक तिहाई *aa* हैं लेकिन उनकी संतानों में एक चौथाई *AA*, आधे *Aa* तथा एक चौथाई *aa* का अनुपात है। हार्डी-वीनवर्ग ने यही सिद्ध किया कि प्रत्येक अनियमित यौन सम्बन्ध वाली जनसंख्या की प्रत्येक आने वाली पीढ़ी में यह अनुपात सदैव एक सा बना रहेगा और अनियमित यौन-सम्बन्ध के अन्तर्गत इस जीन स्थली के लिए उक्त प्रकार की जनसंख्या में जीनी संतुलन स्थापित हो जायेगा।

परन्तु नियमित यौन-सम्बन्ध में, चाहे वह समगुणी हो या असमगुणी हो या असमगुणी हार्डी-वीनवर्ग नियम लागू नहीं हो पाता है जिससे विभिन्न जीन-प्ररूपों के अनुपात को विभिन्न रूप से प्रभावित करता है।

सारणी 2 में 9 प्रकार के पित्रीय यौन-सम्बन्धों से उत्पन्न सन्तानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप दर्शाया गया है। यदि हम यह मान लें कि प्रत्येक यौन-सम्बन्धों से 4 सन्तानों का जन्म हुआ तो कुल 36 सन्तानें पैदा हुई।

सारणी 4

असमगुणी यौन सम्बन्ध से उत्पन्न संतानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप

पित्रीय यौन-सम्बन्ध ♂×♀	उत्पन्न संतानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप *AA*	*Aa*	*aa*
AA×*Aa*	2	2	—
AA×*aa*	—	4	—
Aa×*AA*	2	2	—
Aa×*aa*	—	2	2
aa×*AA*	—	4	—
aa×*Aa*	—	2	2
योग	4	16	4

9 प्रकार के पित्रीय यौन-सम्बन्ध से 9 : 18 : 9 अर्थात् 1 : 2 : 1 के अनुपात में संतानें उत्पन्न होती हैं परन्तु इन्हीं 9 प्रकार के यौन सम्बन्धों को समगुणी और असमगुणी यौन-सम्बन्धों से उत्पन्न संतानों में प्रत्याशित जीन-प्ररूप का अनुपात एक-जैसा नहीं प्राप्त होता है। समगुणी यौन-सम्बन्धों में समयुग्मजी जीन-प्ररूपों की संख्या अधिक ($AA=5$ एवं $aa=5$) प्राप्त होती है, जबकि असमगुणी यौन-सम्बन्ध में असमयुग्मजी जीन-प्ररूपों की संख्या ($Aa=16$) में वृद्धि तथा समयुग्मजीयों की संख्या में कमी आई है।

एलेलीक जीन आवृति की गणना

किसी जनसंख्या में कोई विशेष अप्रबल एलील आवृति, असमयुग्मजी वाहक एलील की संख्या तथा समयुग्मजी प्रबल व्यक्ति की संख्या निर्धारित करने के लिए हमें उस जनसंख्या के प्रतिनिधि नमूने को चुनना पड़ता है तथा वैसे लोगों का प्रतिशत निकाला जाता है जिनमें अप्रबल व्यक्त-प्ररूपीय गुण हों। इस प्रतिशत का वर्गमूल निकाल लेने पर उस जनसंख्या में अप्रबल जीन का सन्निकट प्रतिशत ज्ञात हो जाता है। इस प्रतिशत से असमयुग्मजी और समयुग्मजी व्यक्तियों को अलग कर लिया जाता है। प्रबल एलील के प्रतिशत का वर्गमान ही उस जनसंख्या में समयुग्मजी व्यक्ति हैं तथा अन्य असमयुग्मजी हैं।

उदाहरण : कुछ व्यक्तियों में अपनी जीभ को '*U*' आकार में मोड़ने की क्षमता होती है और किसी में नहीं। जीभ मोड़ने की क्षमता प्रबल जीन के कारण होती है तथा न मोड़ सकने की प्रवृति अप्रबल जीन के कारण होती है। इन दोनों एलीलों की आवृति स्कूली लड़कों में निर्धारित करनी हो तो उस स्कूल के अधिक संख्या में बच्चों को चुनना पड़ता है तथा लिंग, प्रजाति आदि विशेषताओं पर भी ध्यान देना पड़ता है ताकि वे उस जनसंख्या का उचित प्रतिनिधित्व कर सकें।

माना कि प्राप्त नमूनों में $1/16$ लोग अपने जीभ को नहीं मोड़ सकते हैं तो ये अप्रबल समयुग्मजी एलील हैं।

यदि p प्रबल एलील (A) की आवृति है

और q अप्रबल एलील (a) की आवृति है

तथा हरेक व्यक्ति में प्रत्येक लोकस के लिए जीन-प्ररूप के दो एलील होते हैं इसलिए उस जनसंख्या में दो एलीलों के बँटवारे को दिखा सकते हैं—

$$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$$

$$\because \quad q^2=1/16$$

$$\therefore \quad q=1/4$$

अतः उस स्कूल के बच्चों में जीन पूल का $1/4$ भाग अप्रबल एलील (a) तथा $3/4$ भाग प्रबल एलील (A) वाले हैं।

तथा असमयुग्मजी (Aa) व्यक्तियों की आवृति

$$2pq = 2 \times 3/4 \times 1/4 = 3/8$$

और प्रबल समयुग्मजी (AA) व्यक्तियों की आवृति

$$p^2 = (3/4)^2 = 9/16$$

होगी।

इस प्रकार सिर्फ q^2 के मान से दोनों एलीलों एवं जीन प्ररूपों का समानुपात ज्ञात हो जाता है।

बहु-एलील सिद्धान्त

मानव में ऐसे अनेक विशेषक हैं जो सिर्फ दो एलीलों पर अश्रित नहीं होते हैं बल्कि दो से अधिक एलीलों पर निर्भर होते हैं अर्थात् जीनों के दो से अधिक एलील प्ररूप हो सकते हैं और एक समूह के सभी एलील बहु-एलील कहलाते हैं। ये एलील भी केवल एक जीन के दो एलीलों की भाँति ही संचरण नियमों का पालन करते हैं अर्थात् ये भी समयुग्मजी या असमयुग्मजी स्थिति में किसी भी व्यक्ति में मियोसिस तथा निषेचन के फलस्वरूप उपस्थित हो सकते हैं।

आमतौर पर एक जीन के बहु-एलीलों का प्रभाव जीन के एक ही विशेषक पर पड़ता है इसलिए विभिन्न एलील-युग्मों के प्रभाव से एक ही विशेषक के अन्तर्गत कई व्यक्ति-प्ररूप भी हो सकते हैं। एक युग्मी एलीलों की भाँति ये भी आपस मे प्रबल या अप्रबल हो सकते हैं लेकिन इनमें कभी-कभी समप्रभावी एलील भी प्राप्त होते हैं। ऐसी स्थिति में समप्रभावी समयुग्मजी एलीलों का व्यक्ति प्ररूप तथा जीन-प्ररूप भी सम होता है। एक जीन के जितने ही अधिक एलील होंगे उनके जीन-प्ररूप भी उसी प्रकार अधिक होंगे लेकिन यह जरूरी नहीं है कि जीन-प्ररूपों तथा व्यक्ति-प्ररूपों की संख्या बराबर हो।

***ABO* रक्त वर्ग**

ABO रक्त वर्ग के आधारभूत तीन एलील, *A,B,O* की जीन-स्थली एक ही होती है। तीनों एलील समयुग्मजी स्थिति में होने पर *AA*, *BB* तथा *OO* जीन प्ररूप तथा *A,B* एवं *O* व्यक्त-प्ररूप का निर्माण करेंगे। परन्तु इनके असमयुग्मजी होने पर स्थिति थोडी जटिल हो जाती है। एलील *A* और *B* समान प्रभाव वाले होते हैं इसलिए इन दोनों की अभिव्यक्ति बराबर होती है। जैसे *AB* जीन-प्ररूप का व्यक्ति-प्ररूप भी *AB* ही होगा। *O* की तुलना में ये दोनो प्रबल होते हैं जिसके कारण *A* या *B* का *O* के साथ संयोग होने पर इनके जीन-प्ररूप तथा व्यक्ति-प्ररूप में अन्तर होगा। जीन-प्ररूप *AO* तथा *BO* के व्यक्ति-प्ररूप भी *A* तथा *B* होंगे। इस आधार पर विभिन्न रक्त-वर्ग वाले व्यक्तियों के जीन-प्ररूप का अनुमान लगा सकते हैं। चूँकि *O* वर्ग वाले *A* और *B* की तुलना में कम प्रभावी होते हैं जिसके कारण वह हमेशा समयुग्मजी दशा में ही व्यक्त होगा इसलिए *O* वर्ग वाले व्यक्ति के जीन-प्ररूप का अनुमान लगाने की आवश्यकता नहीं होती है। इसी प्रकार *AB* वर्ग वाले व्यक्ति का जीन-प्ररूप भी असमयुग्मजी *AB* होगा क्योंकि दोनों ही समप्रभावी हैं) परन्तु *A* तथा *B* वर्ग वाले व्यक्तिवों का जीन

प्ररूप AA, AO तथा BB, BO दोनों में से कोई भी हो सकता है। इस प्रकार चारो वर्गों के व्यक्तियों को लेकर उनके जीन-प्ररूप की व्याख्या करते हैं तो प्रत्यक्ष हो जाता है कि $O \times O$ के यौन-सम्बन्ध से केवल O वर्ग वाली संतानें उत्पन्न होंगी तथा $AB \times AB$ के सम्बन्ध से O वर्ग की संतान असम्भव है परन्तु अन्य तीनों प्रकार के व्यक्त-प्ररूप संभव हैं।

दो जीनी परिकल्पना की अपर्याप्तता के कारण वर्नस्टेन ने तीन एलील सिद्धांत 1^A, 1^B, 1^O प्रतिपादित किया। उन्होंने यह भी माना कि एलील 1^A एवं 1^B सह-प्रबल होंगे यदि इन्हें जीन-प्ररूप 1^A1^B के साथ मिलाया जाय परन्तु इन्हें 1^O के साथ न मिलाया जाय तो प्रबल असमयुग्मजी स्थिति होगी।

इन मान्यताओं से 6 सम्भावित जीन-प्ररूप आवृति की गणना की जा सकती है और तब उन सभी जीन-प्ररूपों को जिनकी व्यक्त-प्ररूप एक जैसे हों, जोड़कर चारों रक्त वर्ग की आवृति निकाली जाती है।

जीन आवृति की गणना

रक्त वर्ग के अव्ययन में सबसे महत्वपूर्ण तथ्य जीन आवृति की गणना है क्योंकि यह निम्न-लिखित संदर्भों के लिए लाभदायक है—जनसंख्या वर्गीकरण, पूर्व विच्छेद को पता लगाना तथा विभिन्न प्रजातियों का मिलन आदि। यह विभिन्न जनसंख्याओं में रक्त के तत्वों को तुलना करने की एक सरल और सीधा विधि है। रक्त वर्गों के वंशागति की प्रक्रिया से सम्बन्धित सिद्धांतों की वैधता को जाँचता है। जीन आवृति जान लेने से हम यह गणना कर सकते हैं कि किसी भी प्रकार के यौन-सम्बन्धों से होने वाली संतानों की आवृति क्या होगी। जीन आवृति के द्वारा यह भी पता चलता है कि किसी नमूने में विभिन्न वर्गों का वास्तविक वितरण क्या है।

वर्नस्टेन, स्टर्न एवं हेटमेन आदि ने जीन आवृति की गणना करने के लिए एक ही उपयोगी विधि प्रतिपादित की है जिससे व्यक्त-प्ररूप आवृति निकाला जा सकता है।

यदि A की आवृति p, B की आवृति q तथा O की आवृति r हो एवं अनियमित यौन-सम्बन्धो वाली जनसंख्या में अर्थात् उन एजेंसियों जैसे चयन, म्युटेशन, जेनेटिक ड्रिफ्ट आदि के अभाव में जिसके द्वारा जीन आवृति परिवर्तित होती है, निम्न परिणाम मिलते हैं—

जीन-प्ररूप एवं व्यक्त-प्ररूप की सम्भावित स्थितियाँ

	$A(p)$	$B(q)$	$O(r)$
$A(p)$	$AA(p^2)$	$AB(pq)$	$AO(pr)$
$B(q)$	$AB(pq)$	$BB(q^2)$	$BO(qr)$
$O(r)$	$AO(pr)$	$BO(qr)$	$OO(r^2)$

इन्हे जोडने पर

$$p^2+2pq+2pr+2qr+q^2+r^2=1$$

या $(p+q+r)^2=1$

या $p+q+r=1$

अब इससे हम लोग जीन आवृति की गणना कर सकते हैं—

$\because$ O व्यक्तियों की आवृति $=r$

$\therefore$ $r=\sqrt{(O^-)}$ (1)

O एवं A दोनों की आवृति

$$O^-+A^-=r^2+2pr+p^2$$

या $O^-+A^-=(r+p)^2$

$\therefore$ $r+p=\sqrt{(O^-+A^-)}$ (2)

या $p=\sqrt{(O^-+A^-)}-r=\sqrt{(O^-+A^-)}-\sqrt{(O)}$ (3)

इसी प्रकार

$$O^-+B^-=r^2+2qr+q^2$$

या $O^-+B^-=(r+q)^2$

या $r+q=\sqrt{(O^-+B^-)}$ (4)

$\therefore$ $q=\sqrt{(O^-+B^-)}-\sqrt{(O)}$ (5)

$$p+q+r=\sqrt{(O^-+A^-)}-\sqrt{(O^-)}+\sqrt{(O^-+B^-)}$$

या $1=\sqrt{(O^-+A^-)}+\sqrt{(O^-)}+\sqrt{(O^-+B^-)}$ (6)

$\therefore$ $p+q+r=1$

$\therefore$ $q=1-(p+r)$

$=1-\sqrt{(O+A)}$

एवं

$$p=1-\sqrt{(O+B)}$$

इस प्रकार हम किसी जनसंख्या मे A,B,O व्यक्तियों की आवृति की गणना कर सकते हैं। यदि बहुएलील सिद्धांत सही है तो समीकरण हर समय 1 होगा परन्तु वास्तव में $p+q+r$ का मान 1 नहीं

प्राप्त होता है । हर समय थोडा-बहुत विचलन हो ही जाता है । इस विचलन को D द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$\therefore \quad D=1-(p+q)+r)$$

यदि $p+q+r$ का मान 1 से अधिक हो तो D का मान $-ve$ होता है और $p+q+r$ का मान 1 से कम हो तो D का मान $+ve$ होता है ।

वर्नस्टन ने p,q,r जीन आवृति की उपयुक्त गणना के लिए संशोधित सूत्र का व्यवहार किया जिसके अनुसार—

$$p'=(1+D/2)\,(1-\sqrt{(O^-+B^-)}$$

$$q'=(1+D/2)\,(1-\sqrt{(O^-+A^-)})$$

$$r'=(1+D/2)\,(\sqrt{(O^-+D/2)})$$

जहाँ D का मान $(+ve)$ या $(-ve)$ के रूप में ही लिया गया है ।

उपर्युक्त किसी भी सूत्र से जीन आवृति प्राप्त करने के बाद प्राप्त एवं सम्भावित व्यक्त-प्ररूप आवृति के बीच उपयोगिता की अच्छाई की जाँच की जा सकती है । इसके लिए टेलर एवं प्रायर का सूत्र व्यवहार किया जाता है ।

$1/NX^2$ (काई वर्ग)

$$=\frac{(O^- - r^2)^2}{r^2}+\frac{[A^- -(p^2+2pq)]^2}{p^2+2pq}+\frac{[B^- -(q^2+2qr)]^2}{q^2+2qr}+\frac{(AB^- -2pq)^2}{2pq}$$

जहाँ $N=$ जाँचे गये व्यक्तियों की कुल संख्या तथा O^-, A^-, B^- एवं AB^- उन समूह में व्यक्तियों के अनुपात के प्रतिनिधि हैं ।

इसके बाद स्टर्न ने सूत्र को थोडा-बहुत संशोधित कर और भी उपयोगी बनाया । इसके लिए उन्होंने फिशर्स की विधि को अधिकांश रूप में अपनाया । 1940 में फिशर्स एवं टेलर ने कुछ व्यवस्थित त्रुटि पायी और सावधानी के लिए सिर्फ तीन ही ग्रुप से जीन अनुपात की गणना की । अत: सामूहिक त्रुटि का प्रभाव सम्भावित व्यक्ति-प्ररूप आवृति में सामूहिक त्रुटीय प्रभाव को निम्न सूत्र के निरस्त किया गया—

$$O^-=r^2,\ A^-=p^2+2pq,\ B^-=q^2+2qr,\ AB^-=2pq$$

इस सूत्र का प्रयोग किसी जनसंख्या की समयुग्मजी एवं असमयुग्मजी एवं असमयुग्मजियों की गणना के लिए किया गया—

$$AA^{-}=p^2;\ AO^{-}=2pq;\ BB^{-}=q^2;\ BO^{-}=2qr,\ OO^{-}=r^2;\ AB^{-}=2pq.$$

सारणी 5

समीकरण 6 के द्वारा बहुएलील सिद्धांत की जाँच

जनसंख्या	$\sqrt{(O^- + B^-)}$	$\sqrt{(O^- + A^-)}$	$\sqrt{(O^-)}$	$=\sqrt{(O^- + B^-)}+\sqrt{(O^- + A^-)}-\sqrt{(O^-)}$
श्वेत	$\sqrt{(.45+.1)}$ =.742	$\sqrt{(.45+.41)}$ =.927	$\sqrt{(.45)}$ =.671	742+.927—.671 =.998
जापानी	.707	.846	.542	1.011

सारणी 6

कुछ जनसंख्याओं में *A*, B, *O* की एलील आवृति

जनसंख्या	*A*	*B*	*O*	$p+q+r$
अंग्रेज	0.268	0.052	0.681	1.001
फ्रेंच	0.262	0.074	0.657	0.993
हिन्दू	0.149	0.291	0.560	1.000

इस प्रकार बहुएलील सिद्धांत की जाँच कई जनसंख्याओं के लिए की गयी है और प्राप्त एवं सम्भावित मानों में हर समय मिलता-जुलता मान प्राप्त हुआ है।

दास शर्मा[19] ने बिहार के मुण्डा एवं उराँव (अनुसूचित जनजाति) तथा दुसाध (अनुसूचित जाति) लोगों के रक्त वर्गों का व्यक्त प्ररूप आवृति तथा जीन आवृति की गणना की है और पाया है कि उनके बीच आंतरिक सादृश्य है तथा उराँव और दुसाध के बीच कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं है जबकि मुण्डा और उराँव के बीच महत्वपूर्ण अन्तर (X^2=8.36) पाया जाता है।

स्वाद प्रतिक्रिया

स्वाद प्रतिक्रिया भी एक जेनेटिक लक्षण है जिसे जानने के लिए फिनाइल थायोकार्बामाइड (*PTC*) या फिनाइल थायोयूरिया (*PTU*) का प्रयोग किया जाता है। इस रासायन का एक कण परीक्षण किये जाने वाले व्यक्ति की जीभ पर रख दिया जाता है। जीभ पर इसे पिघलते ही जो व्यक्ति तीखे स्वाद

का अनुभव करता है उसे स्वादक (टेस्टर) कहा जाता है और तीखे स्वाद के तीखेपन का कोई अनुभव नही होता है उसे अस्वादक (नन टेस्टर) कहते हैं। यह विशेषक एक प्रबल जीन T पर आधारित है इसलिए सभी स्वादक प्रबल समयुग्मजी TT या असमयुग्मजी Tt होते हैं तथा अस्वादक अप्रबल सम-युग्मजी tt होते हैं। स्वादक प्रबल जीन पर आधारित होती है इसलिए किसी भी जनसंख्या में स्वादकों की संख्या लगभग 75% होती है। यह विशेषक चिम्पैन्जियो में भी पाया जाता है (सिंह [20])।

तीखेपन स्वाद का अनुभव करना भी सभी लोगों में एक जैसा नहीं होता है। किसी को स्वाद का अनुभव तुरंत हो जाता है तो किसी को स्वाद का अनुभव कराने के लिए अधिक मात्रा में रसायन को चखाना पड़ता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए मानव-वैज्ञानिकों ने रसायन का घोल बनाकर प्रयोग करना प्रारम्भ किया। एक ग्राम PTC (या PTO) को 1000 मिली० आसुत जल में घोल दिया जाता है। उसके बाद इस घोल को दो बराबर भागों में बाँट दिया जाता है। एक भाग को नम्बर एक से चिन्हित कर दिया जाता है तथा दूसरे भाग में पुन: 500 आसुत मिली० जल मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्रत्येक नये घोल के आधे भाग में उतना ही आसुत जल मिला कर प्रत्येक घोल की सान्द्रता कम कर दी जाती है। इस प्रकार के 14 घोल बनाये जाते हैं जिन्हें क्रमानुसार अंकित कर दिया जाता है। किसी-किसी ने 12 तथा 16 घोल बनाये जाने की अनुशंसा की है। परीक्षण किये जाने वाले व्यक्ति को 14वें नम्बर घोल से चखाना प्रारम्भ किया जाता है। जिस अंक वाले घोल से स्वाद का ज्ञान होता है वही उसके स्वाद का स्तर माना जाता है। परीक्षण के दौरान बीच-बीच में व्यक्ति को बिना बताये हुए आसुत जल भी चखने के लिए दे दिया जाता है। चखने की प्रक्रिया के लिए हेरिस एवं कालमस[21] द्वारा प्रतिपादित विधि ही अधिक मान्य है।

इस लक्षण के लिए भी हार्डी-वीनवर्ग समीकरण $p^2+2pq+q^2$ के आधार पर स्वादक की एलील आवृति की गणना की जा सकती है।

मान लें कि किसी जनसंख्या है विभिन्न जीन-प्ररूप : 40 TT : 40 Tt : 20 tt के अनुपात में हो तो यह स्वाभाविक है कि जीन आवृति होगी—गुप्ता[21(a)] —

$$T=.40\ (TT)+\tfrac{1}{2}\times .40\ (Tt)$$

$$=.60$$

तथा

$$=.20\ (tt)+\tfrac{1}{2}\times .40\ (Tt)$$

$$=.40$$

इन आवृतियों ($T=.60$ एवं $t=.40$) से दूसरी पीढ़ी में जीन-प्ररूप अनुपात .36 TT : .48 Tt : .16 tt मिलेगा।

सारणी 7

किसी जनसंख्या मे .40 TT, .40Tt एवं .20 tt जीन-प्ररूप के बीच यौन सम्बन्ध से उत्पन्न विभिन्न प्रकार की संतानों की आवृति

पित्रीय यौन सम्बन्ध ♂×♀	यौन सम्बन्धों की आवृति	उत्पन्न सन्तानों का अनुपात TT	Tt	tt	उत्पन्न सन्तानों की आवृति TT	Tt	tt
$TT \times TT$	.16	सभी (.16)	—	—	.16	—	—
$TT \times Tt$	.32	$\frac{1}{2}$ (.32)	$+\frac{1}{2}$ (.32)	—	.16	.16	—
$TT \times tt$	.16	—	सभी (.16)	—	—	.16	—
$Tt \times Tt$	.16	$\frac{1}{4}$ (.16)	$+\frac{1}{2}$ (.16)	$+\frac{1}{4}$ (.16)	.04	.08	.04
$Tt \times tt$	.16	—	$\frac{1}{2}$ (.16)	$+\frac{1}{2}$ (.16)	—	.08	.08
$tt \times tt$	.04	—	—	सभी (.4)	—	—	.04
				योग	.36	.48	.16

सारणी-7 मे प्राप्त अनुपात तभी प्राप्त होगा जब अनियमित यौन-सम्बन्ध उसी जनसंख्या के अन्तर्गत हो। इस अनुपात से यह पता चलता है कि जीन-प्ररूप आवृति में परविर्तन हुआ है लेकिन जीन आवृति में कोई परिवर्तन नहीं है। सारणी से दर्शाये गये जीन-प्ररूप अनुपात से जीन आवृति की गणना करने पर—

$$T = .36\,(TT) + \tfrac{1}{2} \times .48\,(Tt)$$
$$= .60$$

एवं

$$t = .16\,(tt) + \tfrac{1}{2} \times .48\,(Tt)$$
$$= .40$$

अत: जीन-प्ररूप अनुपात

$$0.36\ TT + 0.48\ Tt + 0.16\ tt$$

से अगली पीढ़ी में वही अनुपात प्राप्त होगा जिससे हार्डी-वीनवर्ग संतुलन नियम लागू होता है।

स्वाद का अनुभव करने वालों की आवृति के सम्बन्ध में बहुत से आँकडे उपलब्ध हैं। सामान्यत: हिमालयी क्षेत्र की मंगोल जाति और गंगा तथा ब्रह्मपुत्र घाटी के लोगों का तुलनात्मक अध्ययन करने

सारणी 8

भारतीय जन-जातियों में *ABO* रक्त वर्ग का वितरण (% में)

	जन-जाति/क्षेत्र	संख्या	*O*	*A*	*B*	*AB*	*p*	*q*	*r*	स्रोत
1.	ओंगी (अंडमान द्वि० स०)	34	14.70	67.30	5.90	11.80	53.30	9.22	27.48	सरकार[27]
	,,	60	26.70	68.30	1.70	3.30	46.60	2.50	50.90	कुमार एवं अन्य[28]
2.	कन्निकर (त्रेवेनकोर)	151	33.74	35.10	22.52	2.65	21.35	13.70	65.00	बोस[29]
	,,	167	65.56	20.96	11.98	1.20	11.80	6.80	81.40	बुची[30]
3.	कादर (केरल)	142	39.44	16.20	37.32	7.04	12.40	25.50	63.20	सरकार एवं अन्य[31]
	,,	189	52.37	16.41	26.46	4.76	11.17	17.01	71.82	साहा एवं अन्य[32]
4.	पनियान (विन्द पठार)	250	20.00	62.40	7.60	10.00	47.50	9.20	44.70	अयप्पन[33]
	,,	313	22.40	64.20	7.70	5.70	45.20	7.00	47.30	सरकार[34]
5.	चेंचु (हैदराबाद)	100	37.00	37.00	18.00	8.00	25.70	14.00	60.30	मैकफरलेन[35]
	,,	107	28.70	28.70	37.00	4.60	22.20	27.50	53.60	सायमन एवं अन्य[36]

6.	टोडा (नीलगिरि)	200	29.59	19.50	38.00	13.00	17.60	29.70	52.70	पंडित[37]
	,,	82	12.20	14.50	54.30	18.00	18.00	48.40	34.90	लेमन एवं अन्य[38]
7.	कोटा (नीलगिरि)	86	60.40	—	39.60	—	—	22.23	77.70	वही
	,,	56	57.14	—	39.29	3.57	1.79	24.19	74.02	सरकार[39]
8.	कुसम्बा (नीलगिरि)	116	32.76	22.41	34.48	12.93	16.01	25.87	58.12	बुर्चा[40]
	,,	52	55.77	19.23	23.08	1.92	11.24	13.45	75.31	कर्क एवं अन्य[41]
9.	संथाल (बिहार)	407	31.70	21.38	35.63	11.30	16.60	25.80	56.30	सरकार एवं अन्य[42]
	,,	400	26.50	23.75	38.00	11.75	19.70	29.10	51.20	भट्टाचर्या[43]
10.	उराँव (बिहार)	155	47.10	12.90	39.84	5.76	9.45	22.47	68.08	सरकार[44]
	,,	100	35.00	15.00	40.00	10.00	13.30	29.00	57.00	शुक्ला एवं अन्य[45]
11.	मुण्डा (बिहार)	130	35.38	29.23	28.46	6.92	20.18	19.70	60.12	मैकफरलन एवं
	,,	103	20.38	36.89	28.16	14.56	30.37	24.34	45.29	कुमार[47]
12.	हो (बिहार)	186	34.95	31.72	27.95	5.38	20.90	18.50	60.60	मजुमदार[48]
	,,	200	25.00	28.00	34.50	12.50	22.99	27.01	50.00	मुखर्जी एवं अन्य[49]

पर पाया गया है कि मंगोल जाति में अस्वादक की स्थिति कम है तथा घाटी क्षेत्रों में अस्वादक की स्थिति अधिक है (महापात्रा एवं दास[22])। यदि हम चीन, बर्मा, जापान होते हुए पूर्व की ओर बढ़ते हैं तो अस्वादक जीन का क्रमशः घटता हुआ मान प्राप्त होता है (भल्ला[23]) लेकिन एस्किमो में घटने एवं बढ़ने दोनों ही प्रकार के मान मिले हैं।

दास शर्मा[24] ने बिहार के मुण्डा, उरांव तथा दुसाध लोगों के स्वादक और अस्वादक जीन आवृति का मान प्राप्त किया है जो हिमालयी क्षेत्र के लोगों के ठीक विपरीत है।

सारणी 8 में भारत के विभिन्न क्षेत्रों से पाई जाने वाली जनजातियों में *ABO* जीन आवृति को दर्शाया गया है। सारणी से यह स्पष्ट पता चलता है कि ओंगी जनजाति में लगभग तीन दशकों के बीच p एवं q जीन आवृति का घटा हुआ मान तथा r जीन आवृति का बढ़ा हुआ मान मिला है। चेंचु जनजाति में 13 वर्षों के अन्तर में q जीन मे महत्वपूर्ण वृद्धि हुई है। टोडा जनजाति मे चेंचु के समान ही जीन आवृति मिली है। परन्तु कर्क एवं अन्य[25] तथा लेमन एवं कुटबस[26] के द्वारा प्राप्त आँकडों को देखते हैं तो पाते हैं कि टोडा जनजाति मे 10 वर्ष के अन्तराल में ही ठीक विपरीत मान अर्थात् q जीन आवृति में कमी तथा p और r जीन आवृति में वृद्धि पायी गयी है।

दक्षिण भारत से बिल्कुल ही विपरीत स्थिति उत्तरी भारत की जनजातियों में पायी गयी है। संथाल, मुण्डा, हो एवं उरॉव जनजाति (बिहार) में p एवं q जीन आवृति मे महत्वपूर्ण एवं स्मरणीय वृद्धि हुई है तथा r जीन में कमी आई है। p और q जीन की अधिकतम वृद्धि मुण्डा एवं उरॉव में पायी गयी है जिसमे 26 वर्षों के दौरान p और q जीन के मान में महत्वपूर्ण वृद्धि क्रमशः 20·18% से 30·37% तथा 19·70% से 24·34% तक हुई है और r जीन में लगभग 15% की कमी आयी है। दक्षिण भारत में p और q जीन आवृति में कमी पायी गयी है जबकि उत्तरी भारत में इन दोनों जीनों में वृद्धि हुई है।

बंगाली लोगों में लगभग 30 वर्षों के बीच हुए कार्यों पर (मजुमदार एवं राव[50], चटर्जी तथा मुखर्जी[51], बनर्जी एवं चौधरी[52]) विचार करते हैं तो पाते हैं कि p और q जीन आवृति में कमी है लेकिन यह कमी बहुत ही धीमे क्रम में हुई है तथा r जीन आवृति मे वृद्धि हुई है।

इन अध्ययनों से यह पता चलता है कि भारतीय जनजातियों में एक वर्गीय जीनों का वरणात्मक निरसन एक ही दिशा में नहीं हुआ है। दक्षिण भारत की कम जनसंख्या वाली जनजातियों (ओंगी समेत) में r जीन की वृद्धि असमयुग्मजी के सेलेक्टिव इलिमिनेशन के कारण हुई होगी जो यौन-सम्बन्ध की अननुरूपता के द्वारा उत्पन्न हुआ होगा। सरकार एवं बनर्जी[53] ने कादर युग्मों के *ABO* यौन सम्बन्धों के बीच अननुरूपता की अधिक आवृति (64.70%) पायी हैं।

छोटा नागपुर (बिहार) की जनजातियों में r जीन आवृति में एकरूपीय कमी की पद्धति ने शारीरिक मानव वैज्ञानिकों, आनुवंशिकियों आदि का ध्यान आकर्षित किया है। जनजातीय क्षेत्र में हो रहे पारिस्थितिकीय परिवर्तन, दूसरे प्रजातीय लोगों से सम्बन्ध आदि के कारण जनजातीय जीवन एवं

आदत विशेष कर भोजन पद्धति में कई परिवर्तन हुए हैं। यौन-पद्धतियों में परिवर्तन, खान-पान में परिवर्तन एवं महामारी में रोकथाम आदि छोटा नागपुर की जनजातियों में *r* जीन के सेलेक्टीव इलिमिनेशन के लिए महत्वपूर्ण भूमिका निभायी होगी।

निष्कर्ष

हार्डी-वीनवर्ग नियम के आधार पर हम पाते हैं कि स्थिर जीनी-संतुलन के प्रभाव से किसी भी जनसंख्या मे परिवर्तन नहीं के बराबर होते हैं लेकिन बाधा पड़ते ही जीनी-संतुलन बिगड़ने लगता है जिसस अनेक प्रकार के परिवर्तनों की सम्भाव्यता बढ़ जाती है।

निर्देश

1. टिजियो, जे० एच० तथा लेवन, ए०, हेरेडि०, 1956, **42**, 1-6.

1a. लिज्यून, जे०, गौतियार, एम०, तथा टरपिन, आर०, सी० आर० एके० साइ० 1959, **248**, 1721.

2. सुटन, एच० ई०, एन० इन्ट्रो० ह्यू० जेने०, 1965.

3. बार, एम० एल०, तथा वर्ट्‌म, ई० जी०, नेचर, 1949, **163**, 676.

4. जेकब्स, पी० ए०, वायकसी, ए० जी०, कोर्ट ब्राउन, डब्ल्यू० एम०, मैकग्रिगर, टी० एन० तथा हार्नडेन, डी० पी०, लैनसेट, 1959, **2**, 423.

5. सुटन, एच० ई०, क्रम संख्या 2 जैसा

6. कुमिन्स, एच०, अन० रेक०, 1939, **73**, 407-415.

7. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परि० अनु० पत्रि०, 1991, **34**, (3), 107-114.

8. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परि० अनु० पत्रि०, 1992, **35**, (2), 123-134.

9. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परि० अनु० पत्रि०, 1992, **35** (4) 235-252.

10. लू, के० एच०, अमे० जर० ऑफ ह्यू० जेने०, 1968, **20**, 24-43.

11. युचिदा, आई० ए०, पटाऊ, के० तथा स्मिथ, डी० डब्ल्यू०, अमे० जर० ह्यू० जेने०, **14**, 345.

12. अल्टर, एम०, मेडिसिन, 1966, **46** 35-55.

13. युचिदा, आई० ए० तथा सोल्टन, एच० सी०, पेडि० क्ली० न० अमेर०, 1963, **10**, 409-422.

14. पेनरोज, एल० एस०, नेचर 1963, **197**, 933-938.

15. हाल्ट, एस० बी०, अन्न० ह्यू० जेने०, 1964, **27**, 279-282.

16. क्रम संख्या 12 जैसा

17. क्रम संख्या 14 जैसा

18. युचिदा, आई० ए०, मिलर, जे० आर० तथा सोल्टन, एच० सी०, अमे० जर० ह्यू० जेने०, 1164, **16** 285-291.

19. दास शर्मा, पी०, 1976 (वैयक्तिक सम्पर्क),

20. सिंह, रिपुदमन, शारी० मान० विज्ञा०, 1974, 391.

21. हेरिस, एच० तथा कालसम, एच०, अन्न० जेने०, 1949, **15**, 24-31.

21a. गुप्ता, आर० के०, जेने० 1991, 704.

22. महापात्रा, एल० के० तथा दास, बी० एम० 1968 ई० एन्थो० 1981. से उद्धृत

23. भल्ला, वी०, ह्यूमे० हेरे०, 1972, **22**, 453-458

24. दास शर्मा, पी०, क्रम सं० 19 जैसा

25. कर्क, आर० एल०, लाई, एल० वाई० सी०, बास, जी० एच०, विक्रम सिंह, आर० एल० तथा पेरेरा, टी० ई०, अमे० जर० फिजि० एन्थो०, 1962, **20**, 485-497.

26. लेमन, एच० तथा कुटबस, एम०, रॉय० सोस० ट्रोप० मेडि० हाई०, 1952, **46**, 382.

27. सरकार, एस० एस०, बुले० डिपा० एन्थो०, 1952, **1**, 25,

28. कुमार, एन० तथा मुखर्जी, डी० पी०, जर० ई० एन्थो० लोंसा०, 1983, **18**, 161-168,

29. बोस, उमा, बुले० डिपा० एन्थो०, 1952, **1** 19-24.

30. बुची, ई० सी०, बुले० डिपा० एन्थो०, 1954, **2**, 83.

31. सरकार, एस० एस०, तथा बनर्जी, ए० आर०, मान० विज्ञा० विया० भार० सर०, 1959, **6**.

32. साहा, एन०, कर्क, आर० एल०, सानवाग, एस०, रोसी, एस० एच० तथा भाटिया, एच० एम० ह्यूमे० हेरे०, 1974, 24, 198-218.

33. अयप्पन, ए०, मैन, 1936, 325.

34. सरकार, एस० एस०,क्रम संख्या 27 जैसा

35. मैकफरलेन, ई० डब्ल्यू० सी०, जर० एसि० सोस० बंग० साइ०, 1940, **6**, 39.

36. सायमन, आर० टी०, ग्रेडन, जे० जे०, सेम्पल, एन० एम० और डी० सेमा, जी० डब्ल्यू० एल०, मेडि० जर० ऑस्ट०, 1953, **2**, 497-503.

37. पंडित, एस० आर०, ई० जर० मेडि० रिस०, 1933, **21**, 614.

38. क्रम संख्या 26 जैसा

39. सरकार, एस० एस०, साइंस एण्ड कल्चर, 1959, **25**, 379-380.

40. बुची, ई० सी०, आर्क० क्ला० सिफ्ट० फोर० 1959, **34** 310-316.

41. क्रम संख्या 25 जैसा

42. सरकार, एस० एस० तथा सेन, डी० के० 1952 (ए० आर० बनर्जी 1988-89 से उद्धृत)

43. भट्टाचार्या, पी० एन०, एन्थोपो०, 1969.

44. सरकार, एस० एस०, बुक लैण्ड, कलकत्ता, 1954.

45. शुक्ला, बी० आर० के० तथा त्यागी डी०, इन्डि० जर० फिजि० एन्थो० हू० जेने० 1975, **1**, 59-67.

46, मैकफरलेन, ई० डब्ल्यू० ई० तथा सरकार, एस० एस०, अमेरि० जर० फिजि० एन्थो० 1941, **29**, 398.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

अविगैसित तथा विगैसित निकायों में निऑन के दाब के साथ देहली विभव तथा जोशी प्रभाव का परिवर्तन

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त—जुलाई 16, 1994]

अविगैसित तथा विगैसित निकायों A, B, C तथा D में निऑन गैस के विभिन्न दाबों पर, देहली विभव V_m तथा जोशी प्रभाव Δi का तुलनात्मक अध्ययन किया गया। अविगैसित की तुलना में, विगैसित निकाय में देहली विभव तीन से चार गुना तक पाया गया। अधिकतम जोशी प्रभाव Δi का प्रेक्षण निऑन के 6.4 मिमी• गैस-दाब पर हुआ। इससे उच्च निऑन गैस दाबों पर जोशी प्रभाव का प्रेक्षण नहीं हुआ। प्रेक्षित परिणामों की व्याख्या Δi के लिए जोशी प्रभाव के सिद्धान्त के आधार पर की गई है।

Abstract

Variation of the threshold potential and Joshi effect with pressure of neon in non degassed and degassed systems. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Comparative study of the threshold potential V_m and Joshi effect Δi has been carried out at various pressures of neon in non-degassed and degassed systems A, B, C and D. V_m has been found to be about 3 to 4 times that in a non-degassed system. Maximum Joshi effect Δi was observed at about pNe=6.4 mm in degassed B. At higher pNe, no Δi was observed. The results have been explained on Joshi theory for Δi.

अक्रिय गैसों के सामान्यतः तथा विशेषतः निऑन गैस के उत्तेजन विभव पर अपद्रव्यों के महत्व का पेनिंग[1,2] ने प्रेक्षण किया। विसर्जन पात्र की अन्दर की उत्तेजित भित्तियों पर अधिशोषित अपद्रव्य

पृष्ठीय कार्यफलन को प्रभावित करते हैं[3], जिससे जोशी प्रभाव बहुत प्रभावित होता है। अतः निऑन के गैस-दाब का जोशी प्रभाव पर प्रभाव का अध्ययन किया गया[4]।

प्रयोगात्मक

जोशी प्रभाव का अध्ययन, पूर्व प्रकाशित[5,6] के अनुसार, निऑन गैस को सोडा-ग्लास सीमेन्ज प्रकार के ओजोनित्र A तथा स्लीव-नली C (स्लीव-अन्तराल=60 मिमी) में निबद्ध करके किया गया। अंधकार में त्रिसर्जन धारा i_D तथा 220 वाट 220 वोल्ट के ग्लास बल्ब से किरणन के दौरान विसर्जन धारा i_L का मापन परावर्तन-धारामापी द्वारा किया गया। नेट जोशी प्रभाव $\triangle i$ का मान $(i_L—i_D)$ तथा आपेक्षिक जोशी प्रभाव $\%\triangle i$ का मान 100 $\triangle i/i_D$ है।

परिणाम तथा विवेचना

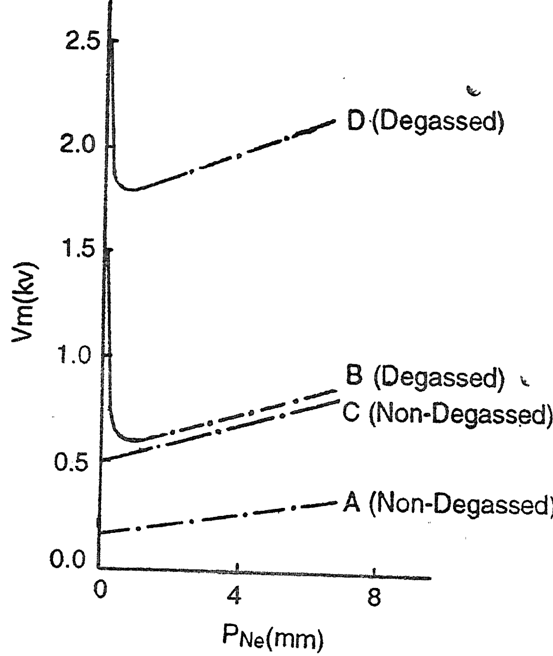
अविगैसित ओजोनित्र A में, 1.2 मिमी, 30°C तथा इससे कम गैस-दाब पर, किसी जोशी प्रभाव का प्रेक्षण नहीं हुआ। जैसे-जैसे दाब बढ़ता गया—$\%\triangle i$ भी बढ़ता गया; 6.4 मिमी दाब पर अधिकतम $-\%\triangle i$ का प्रेक्षण हुआ। तत्पश्चात् यह पुनः घटता गया। स्लीव-नली C में भी इसी प्रकार के व्यवहार का प्रेक्षण हुआ। 1.7 मिमी गैस-दाब से ऊपर इसमें $+\triangle i$ का प्रेक्षण हुआ। यह विस्तृत प्रयुक्त विभव-परास में दुर्लुप्त रहा और गैस-दाब के साथ बढ़ता गया।

प्रयुक्त नलियों A तथा C को विगैसित किया गया और नलियों को दो बार निऑन से प्रक्षालित करके निऑन का गैस-दाब परिवर्तित किया गया। अपद्रव्यों, जिनमें पारद-वाष्प प्रमुख थी, निऑन गैस के विसर्जन नली में प्रविष्ट करने के पूर्व, एक द्रव वायु-ट्रैप को प्रयुक्त किया गया। अविगैसित नलियों के व्यवहार के विपरीत, नली B व D में प्रेक्षित $-\triangle i$ दाब-परास पर्याप्त घटा हुआ पाया गया। ओजोनित्र A में $-\triangle i$ का प्रेक्षण **1.3** मिमी तथा ऊपर के दाबों पर हुआ, जो **3** मिमी दाब तक अवगम्य था। स्लीव-नली C में भी प्रभाव इसी दाब-परास में प्रेक्षित हुआ।

देहली विभव V_m का दाब के साथ परिवर्तन दोनों नलियों में परस्पर असमान था। अविगैसित नलियों में, अन्वेषित दाब-परासों में V_m क्रमशः बढ़ता गया। विगैसित नलियों B व D में यह पहले घटा फिर बढ़ता गया (चित्र 1)।

विगैसित नली B या/तथा D में, निऑन के इतने कम अणु विद्यमान होते हैं कि पर्याप्त द्वितीयक इलेक्ट्रॉनों की उत्पत्ति केवल तभी सम्भव है जब टकराने वाले इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जा उच्च हो। इसका तात्पर्य है कि उच्च विभव V की अनुप्रयुक्ति आवश्यक है। दूसरी ओर, यदि गैस-दाब उच्च है, तब माध्य मुक्त पथ छोटा होता है, अतः किसी अणु के इलेक्ट्रॉन या/तथा आयनी संघट्टन द्वारा आयनन की प्रायिकता अधिक होती है, क्योंकि पड़ोसी अणुओं के टकराने से उनका निष्क्रियण हो जाता है। आयनन के लिए ऊर्जा प्रति माध्य मुक्त पथ का मान एक निश्चित न्यूनतम मान—गैस का आयनन विभव से तनिक अधिक होना चाहिए, अतः एक उच्च विभव की अपेक्षा होती है। दाबों की इन दो पराकाष्ठाओं

के बीच में एक ऐसा दाब होता है जिस पर एक न्यूनतम स्फुलिंग-वोल्टता या देहली विभव V_m की आवश्यकता होती है ।



चित्र 1—नीऑन गैस-दाब pNe के साथ देहली विभव V_m का परिवर्तन जबकि
A=अविगैसित ओजोनित्र; B=विगैसित ओजोनित्र;
C=अविगैसित स्लीव-नली D=विगैसित स्लीव-नली ।

विगैसित तथा अविगैसित दोनों अवस्थाओं में एक विशेष दाब से ऊपर, दाब के बढ़ने के साथ $-\Delta i$ पहले बढ़ा तत्पश्चात् घटता गया । उस क्षेत्र में जिसमें $-\Delta i$ बढ़ता जाता है, अधिशोषण-सदृश सीमान्त-तल या जोशी तल से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन अन्तरकाशी आवेश का कार्य करने में सक्षम होते हैं, जिससे ऋणात्मक प्रभाव $-\Delta i$ का प्रेक्षण होता है । अनुकूलतम दाब के बाद, जब $-\Delta i$ घटता है, इलेक्ट्रॉनी अन्तरकाशी आवेश की तीव्रता के घटने के दो कारण हैं : इलेक्ट्रॉनों के उत्सर्जन की गति स्थिर रहती है, जबकि गैस की सान्द्रता बढ़ जाती है, परिणामत: ऋणात्मक प्रभाव घट जाता है ।

दोनों अवस्थाओं में V के बढ़ने से $-\Delta i$ बहुत तीव्रता के साथ, किसी विशेष V पर लगभग एकदम, घटता हुआ पाया गया । इस विभव पर ऐसा प्रतीत होता है कि उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों में, दूसरे ध्रुव पर शीघ्र पहुँचने के लिए पर्याप्त ऊर्जा होती है और इस प्रकार ये इलेक्ट्रॉन अन्तराकाशी आवेश का कार्य नहीं करते हैं ।

दोनों अवस्थाओं में, जहाँ $-\Delta i$ का प्रेक्षण हुआ, उसके दाब-परास में उल्लेखनीय परिवर्तन का कारण है अविगैसित नलियों में विद्यमान अधिशोषित गैसों का निष्कासन, जो किरणन पर इलेक्ट्रॉनों का उद्गम होते हैं अतः अधिक $-\Delta i$ की उत्पत्ति करते हैं। विगैसित नलियों में, पृष्ठीय तल का निष्कासन हो जाने से दाब-परास कम हो जाता है, जिसमें प्रभाव का प्रेक्षण होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

श्री बी० सुब्रह्मण्यम् के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. पेनिंग, एफ० एम०, जीट्स० एफ० फिज०, 1928, 46, 335
2. पेनिंग, एफ० एम०, फिल० मैग०, 1929, 7, 632
3. ग्रेग, एस० जे०, "सर्फेस केमिस्ट्री ऑफ सालिड्स", चैपमैन एण्ड हॉल, 1951, 20
4. ग्रेग, एस० जे०, "ऐडजोर्पशन आफ गैसेज बाई सालिड्स", मेथ्युएन्स मोनोग्राफ्स, 1934, 30
5. प्रसाद, जे०, सिएन्सिया इ कलचरा, 1971, 23, 565
6. प्रसाद, जे०, रिव० रूमेन किम०, 1975, 20, 1345
7. जोशी, एस० एस०, प्रोसि० इण्डियन साइन्स कांग्रेस, प्रेजि० ऐड्रेस, केमि० सेक्शन 1943, 51

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

डा० कृष्ण बहादुर को विनम्र श्रद्धाञ्जलि

श्रीमती डा० एस० रंगनायिकी

हिन्दू धर्म में विश्वास करने वाले हर व्यक्ति की आकांक्षा होती है कि वह दो पवित्र नदियों और अदृश्य सरस्वती के संगम में डुबकी लगाये और वह है संगम—इसी इलाहाबाद की नगरी में। और यहीं पर उत्तरी भारत के बुद्धिजीवियों पर प्रभुत्व जताने वाला विख्यात विश्वविद्यालय है जो समान सहजता तथा दक्षता से राजनीतिज्ञों, प्रोफेसरों तथा दार्शनिकों को जन्म देने वाला है। ऐसा लगता है कि लोगों के रहन-सहन और मानसिक सोच पर यहाँ की मिट्टी का विशेष प्रभाव है।



इसी नगरी में डा० कृष्ण बहादुर जन्मे, यहीं बढ़े और यहीं हाई स्कूल से लेकर डी० एस० सी० की शैक्षिक उपाधियाँ प्राप्त कीं। उनका जन्म 20 जनवरी सन् 1926 को हुआ। 1940 में उन्होंने

हाई स्कूल की परीक्षा उत्तीर्ण की। उन्होंने बी० एस-सी० तथा एम० एस-सी० उपाधियाँ इलाहाबाद विश्वविद्यालय से प्राप्त कीं। उन्होंने 1949 में रसायन विज्ञान में डी० फिल० तथा 1956 में डी० एस-सी० की उपाधियाँ प्राप्त कीं। सन् 1962 में इम्पीरियल विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी कालेज, लन्दन से उन्हें माइक्रो बायोलाजी में डी० आई० सी० (D I C) की डिग्री प्राप्त हुई।

डा० बहादुर की एकमात्र रुचि केवल अनुसन्धान और शिक्षण में थी और सौभाग्यवश इलाहाबाद विश्वविद्यालय में ही इनके लिये अवसर प्राप्त हुआ। वे इसी विश्वविद्यालय में व्याख्याता के पद पर 1950 में नियुक्त हुए। फिर प्रोफेसर तथा विभागाध्यक्ष के पदों पर कार्य करते हुए 1986 में सेवानिवृत्त हुए।

कार्बनिक रसायन में स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त करने के बाद डा० बहादुर ने स्वयं को अनुसन्धान के लिये पूर्णरूपेण समर्पित कर दिया। भारत के सुप्रसिद्ध रसायन विज्ञानी डा० नील रतन धर के निर्देशन में कार्य करते हुए उन्होंने डी० फिल० और डी० एस-सी० की उपाधियाँ प्राप्त कीं। अपने इन शोधों के दौरान सामान्य स्थानीय ताड़ी से पिचिया इण्डिका नामक यीस्ट (खमीर) विलगित किया जो अपने विकास के लिये एथिल ऐल्कोहल का उपयोग कर सकता था। उन्होंने हाइड्रोजन की क्षति या स्थिरीकरण का प्रेक्षण किया जो सबस्ट्रेट के हाइड्रोजन आयन के सान्द्रण पर निर्भर था। वैज्ञानिकों और कृषि वैज्ञानिकों के अध्ययन का लक्ष्य नाइट्रोजन यौगिकीकरण था और मिट्टी में इस तत्व की सर्वमान्य न्यूनता सबके लिये एक चुनौती बनी हुई थी। मिट्टी की नाइट्रोजन उर्वरता बनाये रखने हेतु नाइट्रोजन के प्रकाशरासायनिक स्थिरीकरण से सम्बन्धित अध्ययन डा० धर के निर्देशन में चल रहे थे। डा० धर और मुखर्जी (1936) ने देखा था कि निर्जर्मीकृत मृदा के साथ उपयुक्त ऊर्जा प्रदान करने वाला पदार्थ मिलाकर सूर्य प्रकाश में रखने पर उसकी नाइट्रोजन धारिता में वृद्धि होती है जबकि अँधेरे में रखे हुए नमूनों में कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इसी प्रकार के परिणाम निर्जर्मीकृत परि-स्थितियों में मृदा के स्थान पर जिंक आक्साइड, फेरिक आक्साइड, निकिल आक्साइड, मैंगनीज डाइ-आक्साइड, बेरियम सल्फेट जैसे रासायनिक पृष्ठों के साथ पाये गये।

1954 में डा० बहादुर ने पैराफार्मेल्डिहाइड, पोटेशियम नाइट्रेट और फेरिक क्लोराइड के जलीय निर्जर्मीकृत मिश्रण को सूर्य प्रकाश में रखने पर देखा कि उसमें लगभग एक दर्जन ऐमीनो अम्लों का निर्माण हुआ है। इससे बिना जीवाणुओं की सहायता से नाइट्रोजन स्थिरीकरण की सम्भावनाओं तदनन्तर यौगिकीकृत नाइट्रोजन का ऐमीनो अम्लों के निर्माण में उपयोग से सम्बन्धित सम्भावनाओं की खोज की दिशा में वे बढ़े। ऐमीनो अम्लों के प्रकाश-संश्लेषण तथा वायुमण्डलीय नाइट्रोजन यौगिकीकरण का प्रेक्षण बहादुर, रंगनायकी और शान्तामारिया (1958) ने उस परिस्थिति में देखा जब पैराफार्मेल्डिहाइड और कोलायडी मोलिब्डेनम आक्साइड के जलीय मिश्रण को 500 वाट के विद्युत बल्ब द्वारा प्रकाशित किया गया। बहादुर ने इस प्रकाशरासायनिक नाइट्रोजन यौगिकीकरण का विस्तृत अध्ययन लौह, निकिल, कोबाल्ट, मोलिब्डेनम, वेनेडियम, जिंक, मैंगनीज, मैग्नीशियम, कापर, बेरीलियम, थोरियम और यूरेनियम का एकल और संयुक्त रूप से प्रयोग करके किया। कुछ प्रकाशगतिक उत्प्रेरकों जैसे फेनान्थ्रेन, फ्लयूरेन, एन्थ्रासीन आदि भी इस प्रक्रिया में सक्षम उत्प्रेरकों के रूप में पाये गये।

डा० बहादुर ने (1957) विचार किया कि क्या जल में घुलित कार्बन डाइआक्साइड को पैराफार्मल्डिहाइड के लिये प्रतिस्थापित किया जा सकता है और इस दिशा में किये गये प्रयोगों से उन्हें सकारात्मक परिणाम मिले।

अगस्त सन् 1957 में जीवन की उत्पत्ति से सम्बन्धित मास्को में हुई अन्तर्राष्ट्रीय संगोष्ठी में प्रो० ए० आई० ओपेरिन जिन्हें जीवन उत्पत्ति का अन्वेषणकर्ता कहा जाता है, के साथ-साथ डा० बहादुर को भी अपना शोधपत्र "प्रोटोप्लाज्म तथा अन्य जैविक महत्व के पदार्थों के संश्लेषण के पूर्व यौगिकों का निर्माण (Formation of compounds preliminary to the synthesis of protoplasm and other materials of biological importance) प्रस्तुत करने के लिए आमन्त्रित किया गया।

अनुसन्धान के इस क्षेत्र में डा० बहादुर द्वारा अगला कदम ऐमीनो अम्लों, कार्बनिक अम्लों, शर्कराओं के जलीय मिश्रण और अकार्बनिक उत्प्रेरकों जैसे कोलायडी आयरन, मोलिब्डेनम आक्साइड और कार्बनिक उत्प्रेरक जैसे बेन्जाइल परआक्साइड के द्वारा पेप्टाइडों का संश्लेषण था। उन्होंने ऊर्जा के लिये अपेक्षाकृत दुर्बल स्रोतों यथा सूर्य प्रकाश या कृत्रिम प्रकाश का उपयोग किया गया क्योंकि प्रकाश के शक्तिशाली स्रोत के उपयोग से बने हुए अणु शीघ्रता से टूट जाते हैं (1958, 1961)। चूँकि इनमें से कुछ पेप्टाइड एन्जाइम के रूप में सक्रिय हो सकते हैं, इसलिये एन्जाइम से सम्बन्धित खोज भी की गयी और इस तरह प्रकाशित करने पर फास्फेटेज सक्रियता और एस्टरेज सक्रियता भी पाई गयी।

बहादुर (1963) ने "जीवाणु" का संश्लेषण प्रकाश रासायनिक विधि से सामान्य कार्बनिक और अकार्बनिक पदार्थों का उपयोग करते हुए किया। "जीवाणु" का अर्थ हैं—"जीवन का कण"। ये पहले जीवित कण थे जो अजीव कणों से संश्लेषित किये गये थे। "जीवाणु संश्लेषण" के इस कार्य की पुष्टि डा० एम० एच० ब्रिग्स नामक अँग्रेज वैज्ञानिक ने की। उन्होंने आक्सफोर्ड में 1964 में हुए प्रकाश जैविकी (photobiology) के अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन में अपना शोधपत्र प्रस्तुत किया। उन्होंने 'स्पेस फ्लाइट' नामक पत्रिका में सन् 1965 में दूसरा प्रमाण प्रकाशित किया। डा० ब्रिग्स के अनुसार यह प्रतिवेदन डा० बहादुर के कार्य का विस्तार और प्रमाणीकरण था। यह कार्य पुनः यू० एस० ए० के वैज्ञानिकों डा० मुलर पी० और रुडिन डी० ओ० (1970) द्वारा दुहराया गया। कोशाओं में अनुपस्थित पदार्थों वाले आज के जीवाणुओं का भी संश्लेषण डा० बहादुर और उनके सहयोगियों ने किया। इन जीवाणुओं में एक विशिष्ट आन्तरिक रचना और सीमा भित्ति होती है। इन्हें जैविक स्थिरीकारकों के द्वारा स्थिरीकृत और जैविक रंजकों द्वारा रंगा जा सकता है जिससे फास्फोलिपिड, शर्कराओं, न्यूक्लियोटाइडों और साइटोप्लाज्म जैसे पदार्थों की उपस्थिति प्रदर्शित होती है।

बहादुर की प्रयोगशाला में जीवाणु पर कार्य चलता रहा और इसमें वैज्ञानिकों की एक टीम लगी हुई थी। प्रारम्भ में सूर्य प्रकाश से अनुप्रभावित करने में दीर्घ अवधि लगती थी किन्तु इस तरह परिष्कृत कण तैयार किये गये (1970) जिनके लिये यह अवधि कम थी। सन् 1978 में किंग्स कालेज लन्दन में डा० डी० ओ० हाल और उनके बीच सहकारिता स्थापित हुई और फेरीडाक्सिन जैसे पदार्थ की उपस्थिति की पहचान की गयी। ये जीवाणु, पानी की फोटोलिसिस के लिये आवश्यक

क्लोरोप्लास्ट-फेरीडाक्सिन डिहाइड्रोजिनेज को प्रतिस्थापित कर सकते थे। सन् 1980 में एम्स रिसर्च सेन्टर एन ए एस ए (NASA) के डा० एडोल्फ स्मिथ और हवाई विश्वविद्यालय के डा० क्लायर फोल्सम के साथ सहकारिता में इन सूक्ष्म संरचनाओं में नाइट्रोजिनेस जैसी सक्रियता की उपस्थिति देखी गई। मोलिब्डेनम माइक्रोस्ट्रक्चर तथा D_2O के जलीय मिश्रण में ऊपरी स्थान में ऐसीटिलीन रख कर प्रकाशित करने पर CHD=CHD के रूप में एथीलीन का निर्माण, D_2O से प्रोटान प्राप्त करने को प्रदर्शित करता है। ^{14}C और ^{15}N के प्रयोग द्वारा आगे की गई खोजों से "जीवाणु" के जलीय मिश्रण में कार्बन और आणवीय नाइट्रोजन के प्रकाश-रासायनिक यौगिकीकरण का स्पष्टीकरण हुआ (1981)।

इलाहाबाद विश्वविद्यालय की रसायन प्रयोगशाला में सीमित सुविधाओं के बावजूद डा० बहादुर के निर्देशन में अनुसन्धान टोली द्वारा बहुत से अनुसन्धान किये गये जिनका सत्यापन अन्यत्र हुआ। "जीवन उत्पत्ति" के अध्ययन के लिये मानो डा० बहादुर पूर्णतया समर्पित थे और वही उनका मुख्य क्षेत्र बन गया। उन्होंने अपने अनुसन्धान खमीर (यीस्ट) किण्वन, ब्यूटेन डायोल किण्वन, सिट्रिक अम्ल किण्वन, सेल्यूलोज किण्वन पर किये।

डा० बहादुर के निर्देशन में 50 से अधिक विद्यार्थियों ने डी० फिल० और 4 विद्यार्थियों ने डी० एस-सी० की उपाधियाँ प्राप्त कीं। उन्होंने भारत तथा बाहर की जानी मानी शोध पत्रिकाओं 300 से भी अधिक वैज्ञानिक पत्र प्रकाशित किये।

डा० बहादुर के अनुसन्धान और परिणाम नेचुरल हिस्ट्री संग्रहालय, न्यूयार्क में और ऐमीनो अम्लों के प्रकाश संश्लेषण पर किये गये अनुसन्धान नेचुरल हिस्ट्री संग्रहालय लन्दन में प्रदर्शित किये जा रहे हैं।

इनके कार्यों को विदेशों में प्रकाशित अनेक पुस्तकों में सन्दर्भित किया गया है। ये हैं

(1) **आर्गेनिक केमिस्ट्री** : वाल्यूम-2, लेखक आई० एल० फिनर, द इंग्लिश लांग्वेज बुक सोसाइटी एण्ड लांगमैन्स, ग्रीन एण्ड कम्पनी लिमिटेड, लन्दन 1962, पृष्ठ 580।

(2) **बायोकेमिकल प्रीडेस्टीनेशन** : डीन, के० केन्यान ग्रे स्टीनमैन। मैकग्रा-हिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क (1969), पृष्ठ 144, 237, 238-39।

(3) **द लाइफ पजल** : ए० जी० कैरन्स स्मिथ, ओलीवर एण्ड ब्वायेड इडेन बर्ग (1971) अध्याय-2, पृष्ठ-17।

(4) **द ओरिजिन ऑव लाइफ** : जान कियोसैन, द्वितीय संस्करण, रेनहोल्ड बुक कारपोरेशन (1963) पृष्ठ 32, 43, 50 और 60।

(5) **जेनेटिक टेकओवर एण्ड मिनरल ओरिजिन ऑव लाइफ** : कैरन्स स्मिथ ए० जी०, पृष्ठ 424, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, कैम्ब्रिज (1982)।

आखिर प्रथम जीवन तन्त्र के निर्माण की पहेली को सुलझाने के लिये समर्पित शोध के पीछे कौन सी प्रेरणा थी जो डा० बहादुर को विह्वल करती रही ?

ऋग्वेद और अथर्ववेद स्पष्टतया घोषित करते हैं कि जीवन की उत्पत्ति जल में प्राथमिक तत्वों की पारस्परिक क्रिया से हुई और इस अनुसन्धान का व्यवहारिक प्रयोग क्या है जो स्पष्टतया शुद्ध रूप सैद्धान्तिक है ? इन जीवाणुओं का बड़े पैमाने पर उत्पादन सूर्य प्रकाश द्वारा जल अणुओं को हाइड्रोजन और आक्सीजन में तोड़ने तथा वर्तमान ऊर्जा संकट को हल करने में किया जा सकता है क्योंकि सूर्य प्रकाश और पानी पृथ्वी पर पर्याप्त मात्रा में उपलब्ध हैं। जैसे-जैसे हम विभिन्न वैज्ञानिकों द्वारा संश्लेषित तन्त्रों के बारे में जानेंगे तो हम पायेंगे कि केवल जीवाणु के जलीय मिश्रण में ही उत्क्रमणीय प्रकाश-रासायनिक इलेक्ट्रान स्थानान्तरण की क्रियाविधि है और इन परिवर्तनों के दौरान स्वतन्त्र हुए प्रोटान कई तरीकों से उपयोग में लाये जा सकते हैं। उनके अनुसन्धान का यह भाव पूरे जीवन भर उनका ध्यान आकर्षित करता रहा।

डा० बहादुर कई पुस्तकों के भी लेखक थे। उन्होंने अपने अनुसन्धानों, जीवाणु के संश्लेषण, प्रोटोसेल्स और ओरिजिन आव-लाइफ-ए फंशनल एप्रोच पर पुस्तके लिखीं। उन्होंने उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी के लिये हिन्दी में "प्रतिजैविकों" पर एक पुस्तक लिखी और इस पुस्तक को उत्तर प्रदेश हिन्दी संस्थान द्वारा 1976-77 में एक पुरस्कार भी मिला। उन्होंने हाई स्कूल तथा इन्टरमीडियेट के लिये हिन्दी में रसायन और भौतिक विज्ञान की पाठ्य पुस्तकें भी लिखीं। उनको सबसे अधिक पसन्द था—पेचीदा विषयों पर सरल बोधगम्य भाषा में बच्चों के लिये पुस्तकें लिखना। उनकी पुस्तकें, 'चाँद की यात्रा' और 'ताजी खोजें' भारत सरकार और उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा पुरस्कृत हो चुकी हैं। उन्होंने बच्चों के लिये भी हिन्दी में जीवन की उत्पत्ति, हमारा ब्रह्मांड और परमाणु ऊर्जा पर पुस्तकें लिखीं।

डा० बहादुर ने इलाहाबाद से सामान्य वैज्ञानिक अभिरुचियों पर आधारित अनेक विषयों पर प्रकाशित होने वाली 'विज्ञान' पत्रिका के लिये कई विद्वतापूर्ण लेख लिखे। वे बनारस से प्रकाशित होने वाली पत्रिका 'हिन्दुत्व' के भी लेखक थे। उसमें उन्होंने हिन्दू धर्म की पृष्ठभूमि पर अनेक वैज्ञानिक विषयों पर लेख लिखे।

वे 1959-60 में नफील्ड फेलो रहे और लन्दन में इम्पीरियल कालेज आव साइन्स एण्ड टेक्नालोजी में एक वर्ष तक कार्य किया। वे सन् 1963 में वैज्ञानिक थे और फ्लोरिडा स्टेट विश्वविद्यालय तालाहासी में सात वर्षों तक कार्य किया। उन्हें कनाडा के कामनवेल्थ ट्रेवेलिंग रिसर्च फेलोशिप से सन् 1968-69 में नवाजा गया तथा सर जार्ज वीलियम विश्वविद्यालय मान्ट्रियल, कनाडा में एक वर्ष तक जीवन की उत्पत्ति पर कार्य किया।

डा० बहादुर ने अनेक संगोष्ठियों और सम्मेलनों में भाग लिया। ये हैं

(1) फरवरी 1963 में पासाडेना (यू० एस० ए०) में 'रिसेन्ट ट्रेन्ड्स इन एक्सोबायोलाजी' पर आयोजित एन ए एस ए संगोष्ठी।

(2) मई 1969 में ईस्टर्न पेन्सिल्वेनिया साइकियाट्रिक इन्स्टीट्यूट फिलोडेल्फिया (यू० एस० ए०) के मालीकुलर बायोलाजी विभाग में वैज्ञानिक सलाहकार के रूप में।

(3) जुलाई 1983 में मिन्ज (एफ आर जी) में हुए चौथे आइसोल (ISSOL) सम्मेलन में शोधपत्र पाठन।

(4) जुलाई 1983 में ग्लासगो में 'ओरिजिन आव लाइफ एण्ड क्रिस्टल जीन' पर हुई अन्तर्राष्ट्रीय संगोष्ठी में एक व्याख्यान।

(5) नासा (NASA) एम्स रिसर्च सेन्टर द्वारा 19-21 जनवरी 1994 की सर्कमस्टेबलर हैबिटेबिल जोन्स पर आयोजित प्रथम अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन में आमन्त्रित। परन्तु अपनी रुग्णता के कारण वे सम्मिलित नहीं हो पाये।

वे अनेक समितियों (Societies) के सदस्य थे। उनमें से कुछ हैं।

1. 'राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी', भारत के आजीवन सदस्य।
2. 'विज्ञान परिषद', इलाहाबाद के आजीवन सदस्य।
3. 'ओरिजिन आव लाइफ' आइसोल (ISSOL) के अध्ययन हेतु अन्तर्राष्ट्रीय समिति के सदस्य।
4. रायल सोसाइटी, न्यूसाउथवेल्स (आस्ट्रेलिया) के सदस्य।
5. इम्पीरियल विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी कालेज लन्दन के सहयोगी रायल कालेज आव साइन्स के आजीवन सदस्य।

जनवरी 1994 में मस्तिष्क में रुधिर जमाव (Cerebral thrombosis) के कारण डा० बहादुर के शरीर का बाँया हिस्सा लकवाग्रस्त हो गया। कुछ महीनों तक शैय्या पर ही पड़े रहे। लेकिन शहर में बड़े पैमाने पर फैले वायरस बुखार ने इनके दुर्बल शरीर को संक्रमित कर दिया और फेफड़ों पर आक्रमण के कारण ये स्वस्थ न हो सके। अन्ततः 5 अगस्त सन् 1994 को मृत्यु हो गई।

निर्देश

Dhar N. R. and MukLerji S. K. J. Indian Chem. Soc. 8 159-175 (1936).
Bahadur K. Nature 173, 1141 (1954).

Bahadur K. Ranganayaki S. Santamaria L. Nature London 182, 1668 (1958).

Formation of amino acids in water containing dissolved carbon dioxide and molybdenum colloid on exposure to artificial light. Ranganayaki S. and Bahadur K. USSR Acad. Sc. No. 6. 754-55 (1957).

Formation of compounds preliminary to the synthesis of protaplasm and other materials of biological importance.

International Symposium on the Origin of Life on the Earth held at Moscow in Aug. (1957).

Formation of peptide bonds in aqueous solution and aqueous line of molecular evolution. Ranganayaki S. and Bahadur K. Proc. Natl. Acad. Sc. India **27A** Part IV 292-295 (1958).

Photochemical formation of peptide bonds in aqueous solutions. Bahadur K. Perti O. N. and Pathak H. D. Proc. Nat. Acad. Sc. India 30th Part II 206-220 (1961).

Perti. O. N. Bahadur K. and Pathak H. D. Biochimiya T 27(4) 708-714 (1962). Bahadur K. and coworkers Vijnana Parishad Anusandhan Patrika **6** 63-117 (1963).

Bahadur K. et al Zbl. Bakt **117** (2) 575-602 (1864).

Bahadu K. et al Zbl. Bakt. **118** (2) 671-694 (1964).

Briggs M. H. Space flight 7 (4) 129-131 (1965).

Mueller P. and Rudin D. O. Current Topics in Bioenergetics **3** 157 (1970).

Bahadur K. and Ranganayaki S. J. Brit Interplanetary Socicty **23** 813-822 (1970).

Rao K. K., Adam M. W. W., Morris P., Hall D. O., Ranganayaki S. and Bahadur K.

Biophotolysis of water for H_2 production via natural and artificial catalytic systems.

Presented at the BASE symposium Madurai India Dec. 1978. Eds A Gnanam, S. Krishnamurthi, J. S. Khan. The McMillan Co. India Madras 201-4.

Smith A. Folsome C. and Bahadur K. Carbon dioxide reduction and nitrogenase activity in origanic molybdenum microstructures. Experientia 37, 357 (1981).

S. Ranganayaki

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 1, 1995

सीमेण्ट धूल प्रदूषण के अन्तर्गत उगाये गये कुसुम (Safflower) के कुछ वृद्धि मापदण्डों का विश्लेषण

चक्रपाणि मिश्र तथा श्री रंग जी दूबे
वनस्पति विभाग, महराजा कालेज, आरा (बिहार)

[प्राप्त—सितम्बर 20, 1994]

सारांश

बिहार राज्य के रोहतास जिले में स्थित कल्याणपुर 'लाइम एण्ड सीमेण्ट वर्क्स लिमिटेड', बन्जारी के आस-पास के क्षेत्र में उगाये गये कुसुम (Safflower) पर सीमेण्ट धूल प्रदूषण का प्रभाव देखा गया। कुछ वृद्धि मापदण्ड विस्तार में अध्ययन किये गये। हमारे अध्ययन से यह पता चला कि सीमेण्ट धूल के अधिक सान्द्रण से कुसुम के पौधों की ऊँचाई, आधारीय क्षेत्र तथा पर्ण क्षेत्र सूचकांक में धीरे-धीरे कमी आती है।

Abstract

Analysis of some growth parameters in safflower under cement dust pollution. *By* Chakrapani Misra and Srirangjee Dubey, P. G. Department of Botany, Maharaja College, Arra (Bihar).

Effect of cement dust pollution on safflower (Carthamus tinctorius) in the vicinity of Kalyanpur lime and cement works Ltd. Banjari, Rohtas, Bihar (India) has been investigated. Some growth parameters have been studied in detail. Our studies revealed that high concentration of cement dust pollution leads to gradual decrease in height, basal area and leaf area index.

एस्टरेसी कुल के कुसुम (कार्थेमस टिन्क्टोरियस लिन॰) से खाद्य तेल प्राप्त होने के कारण यह एक बहुमूल्य फसल है। खरीफ की फसल के रूप में उगायी जाने वाली यह बारानी जाति खेत की अत्यल्प तैयारी तथा खाद तथा सिंचाई में बिना किसी विशेष ध्यान के सफलतापूर्वक उगायी जा सकती

है। यह शुद्ध फसल या दलहनों के साथ मिश्रित फसल के रूप में उगायी जा सकती है। सीमेण्ट के कण पादप वृद्धि को विभिन्न प्रकार से प्रभावित करते हैं[1]। सीमेण्ट फैक्टरी से एक किलोमीटर से अधिक दूर होने पर भी ये कण पादप-वृद्धि जो कम करते हैं[2]। इन प्रेक्षणों को ध्यान में रखते हुए सीमेण्ट धूल प्रदूषण का कुसुम के कुछ वृद्धि मापदण्डों पर प्रभाव देखने हेतु इस अध्ययन की रूपरेखा बनायी गयी।

प्रयोगात्मक

हमारे अनुसन्धान के क्षेत्र कल्यानपुर लाइम एण्ड सीमेण्ट वर्क्स लिमिटेड, बंजारी, रोहतास, बिहार (24.57 'उत्तरी अक्षांश और 84' पूर्व देशान्तर) में स्थित थे। समुद्र तल से इसकी ऊँचाई लगभग 405' थी। वर्तमान अध्ययन हेतु कुसुम के दो प्रक्षेत्र थे—पहला सीमेण्ट फैक्टरी के नजदीक (सीमेण्ट की धूल से प्रदूषित) और दूसरा वहाँ जहाँ पर धूल का प्रभाव नहीं था, इसे एक नियन्त्रण प्रक्षेत्र के रूप में लिया गया। क्षेत्र की मिट्टी बलुई दोमट और हल्के भूरे रंग की थी। यहाँ की जलवायु मानसूनी है। कुसुम के बीज पंक्तियों में नियन्त्रण और प्रदूषित प्रक्षेत्रों पर 30×30 वर्ग मीटर के क्षेत्र में अक्टूबर 1991 के अन्तिम सप्ताह में बोये गये। बीजों का अंकुरण बोने के चार से छः दिन बाद हुआ। हर पंक्ति में पौधों की 30 सेमी० की एक समान दूरी बनाये रखने हेतु अतिरिक्त पौधों को निकाला गया। पौधों के नमूने नियन्त्रण और प्रदूषित क्षेत्रों से बोने के 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150 और 165 दिनों के अन्तराल पर लिये गये। वाटसन[10] द्वारा दिये सूत्र से पर्ण क्षेत्रफल सूचकांक का निर्धारण किया गया।

$$L_A = \frac{LAI}{A}$$

जहाँ

L_A=कुल पर्ण क्षेत्रफल

A=भूमि क्षेत्रफल

आधारीय क्षेत्रफल निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया गया।

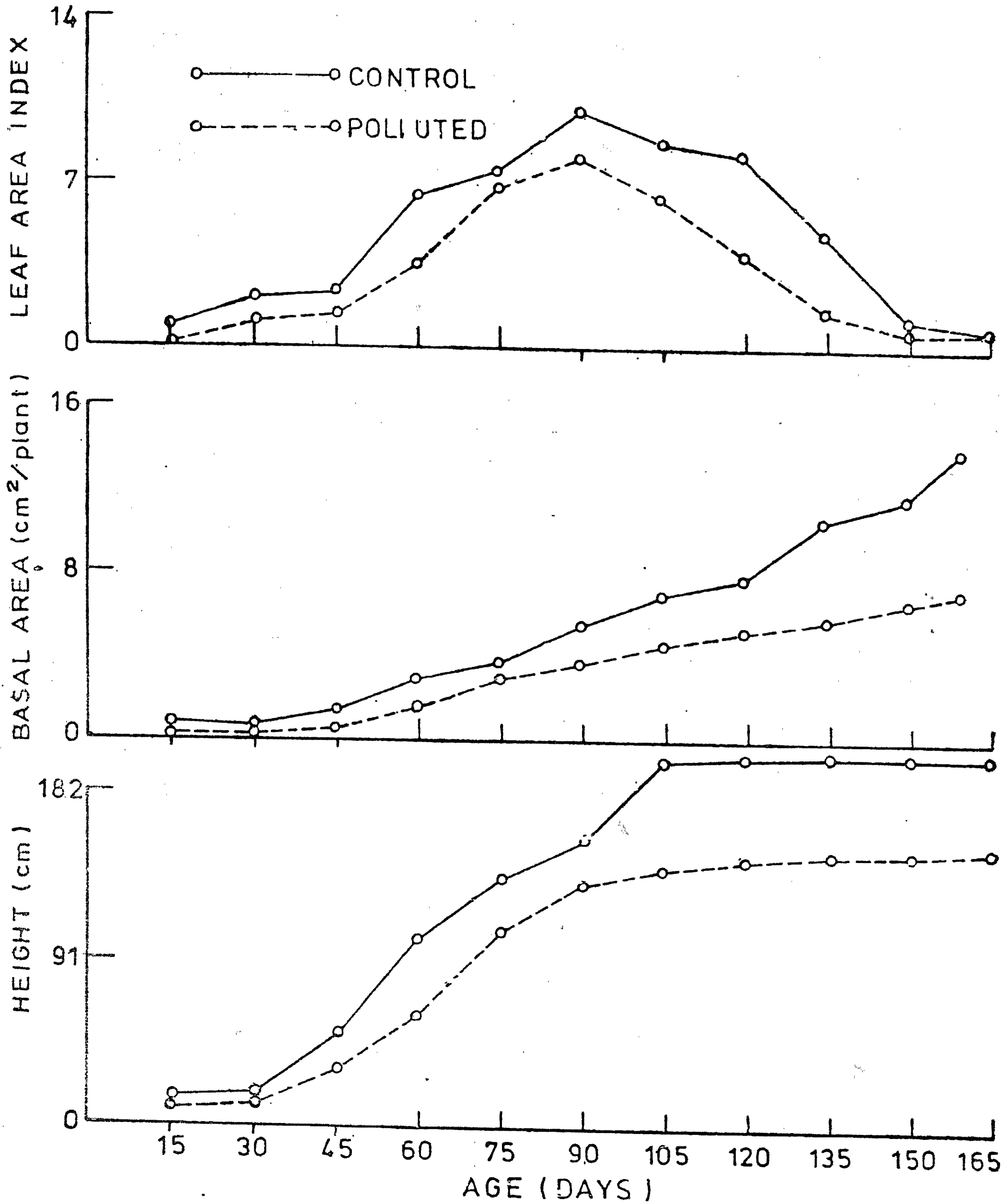
आधारीय क्षेत्रफल$=3.14 \times r^2$

r=अंकुरण बिन्दु पर तने की त्रिज्या

परिणाम तथा विवेचना

वृद्धि मानकों (ऊँचाई, आधारीय क्षेत्रफल और पर्ण क्षेत्रफल सूचकांक) पर सीमेण्ट धूल प्रदूषण के परिणाम सारणी-1 और चित्र-1 में प्रस्तुत हैं। नियन्त्रण और प्रदूषित क्षेत्र के कुसुम के पौधों की ऊँचाई क्रमशः 14.82 सेमी० (15 दिन पर) और 176.20 सेमी० (65 दिन पर), 12.34 सेमी० (15 दिन पर) और 154.25 सेमी० (165 दिन पर) थी। यह पाया गया कि नियन्त्रण प्रक्षेत्र की ऊँचाई, प्रदूषित क्षेत्र की तुलना में पौधों की हर आयु में सर्वाधिक थी।

नियन्त्रण और प्रदूषित क्षेत्रों के आधारीय क्षेत्रफल के सम्बन्ध में हमारे प्रेक्षण स्पष्टतया संकेत करते हैं कि वृद्धि की विभिन्न अवस्थाओं में प्रदूषित कुसुम की तुलना में नियन्त्रण प्रक्षेत्रों में आधारीय क्षेत्रफल सर्वाधिक था।



चित्र 1

सारणी 1

कुसुम की ऊँचाई, आधारीय क्षेत्रफल तथा पर्ण-क्षेत्रफल सूचकांक

	ऊँचाई (सेमी)		आधारीय क्षेत्रफल (सेमी^{2}/पौधा)		पर्ण क्षेत्रफल सूचकांक	
आयु (दिन)	नियन्त्रण	प्रदूषित	नियन्त्रण	प्रदूषित	नियन्त्रण	प्रदूषित
15	14.82±0.38	12.34±0.44	0.08±0.01	0.03±0.00	0.62±0.02	0.18±0.01
30	19.49±0.49	14.50±0.54	0.33±0.01	0.14±0.10	2·14±0.08	0.96±0.03
45	46.99±1.17	29.80±1.13	1.43±0.05	0.45±0.01	2.18±0.08	1.46±0.05
60	102.99±2.89	60.20±2.35	2.69±0.09	1.55±0.04	6.44±0.25	3.52±0.11
75	135.49±3.92	106.25±4.25	3.63±0.12	2.83±0.08	7.68+0.30	7.04±0.24
90	157.99±4.74	132.80±4.48	5.73±0.20	3.82±0.11	10.32±0.41	8.08±0.24
105	168.99±5.24	143.10±3.58	7.05±0.25	4.50±0.13	8.80±0.22	6.55±0.24
120	172.00±5.50	149.15±4.00	7.80±0.28	5.32±0.16	8.42±0.22	3.55±0.14
135	173.25±5.71	150.75±4.22	10.63±0.39	5.84±0.18	5.01±0.14	1.53±0.06
150	174.75±5.95	132.65±4.43	11.67±0.44	6.60±0.21	1.16±0.03	1.09±0.04
165	176.20±6.16	154.25±4.63	13.83±0.54	7.10±0.25	0.72±0.02	0.65±0.03

पर्ण क्षेत्रफल सूचकांक, मौसमी फसलों की सघनता (crop cover) और पत्तियों की सक्रियता का एक सार्थक सूचकांक है जहाँ पत्तियाँ आने वाले सौर विकिरण द्वारा प्रकाशित होती हैं। हमारे प्रेक्षणों में शुरुआत में नियन्त्रण और प्रदूषित क्षेत्रों के पर्ण क्षेत्रफल सूचकांक (LAI) समान थे परन्तु 165 दिनों की वृद्धि में इनमें काफी भिन्नता आई (चित्र-1)। नियन्त्रण प्रक्षेत्र के कुसुम का LAI 15 से 90 दिन के बीच 0.62 से 10.32 तक बढ़ा जो बाद में 165 दिन में घट कर 0.72 हो गया। प्रदूषित प्रक्षेत्र में LAI 15 से 90 दिनों में 0.18 से 8.08 तक बढ़ा जो बाद में 165 दिन पर घट कर 0.65 तक हो गया। सारणी-1 यह स्पष्टतया प्रदर्शित करती है कि प्रदूषित कुसुम में नियन्त्रित कुसुम की तुलना में विकास की किसी भी अवस्था में क्रमशः कमी आयी। नियन्त्रण और प्रदूषित प्रक्षेत्रों के कुसुम में अधिकतम पत्तियाँ/पौधे 135 दिन की उम्र पर पाये गये। इसी प्रकार के परिणाम प्रकाश-संश्लेषणिक पर्ण क्षेत्रफल के मामले में भी पाये गये (सारणी-1)।

सीमेन्ट कैल्सियम, ऐल्यूमीनियम, सिलिका और सोडियम आक्साइड का मिश्रण है। इसके 0.1 से 100 μ आकार तक के कण पादप वृद्धि को कई रूप में प्रभावित करते हैं। प्ररोह की लम्बाई, पत्तियों की संख्या और पुष्पक्रम से सम्बन्धित प्रेक्षणों में प्रदूषित क्षेत्र के कुसुम के पौधों की संख्या कम थी। इसी प्रकार के प्रेक्षण पार्थसारथी तथा साथियों[8] और पाण्डेय तथा सिन्हा[7] द्वारा किये गये हैं जिन्होंने यह पाया कि सीमेन्ट धूल से प्रदूषित क्षेत्र में उगे मक्के की पत्तियों की संख्या कम एवं उनका आकार भी छोटा था। इस प्रकार के प्रभाव प्रदूषित पौधों के कम प्रकाश अवशोषण के कारण कम हुई प्रकाश संश्लेषणिक क्षमता के कारण, (पीयर्स[9], जाजा[2], लरमैन[6] (CO_2 विनिमय में हस्तक्षेप के कारण (जाजा[3], डार्ले[4]) घटे प्रकाशसंश्लेषणिक क्षेत्र और मृदा के भौतिक-रासायनिक अनिच्छित परिवर्तनों के कारण हो सकते हैं। प्रारम्भ में पत्तियों की संख्या में वृद्धि Ca^{++} के तीव्र अवशोषण के कारण हो सकती है जो पौधों की कोशिका विभाजन एवं विकास को तीव्र कर दे जो नयी पत्तियों के लिये आवश्यक है। प्रदूषित पौधों के पर्ण क्षेत्रफल हमेशा नियन्त्रण पौधों से कम रहे। वृद्धि मानदण्डों के सन्दर्भ में सीमेन्ट के कण बहुत ही गम्भीर और नाशक प्रदूषक लगते हैं। सीमेन्ट धूल प्रदूषण को आधुनिक प्रदूषणरोधी उपक्रमों के प्रयोग द्वारा तुरन्त रोकने के प्रयास किये जाने चाहिये।

निर्देश

1. बोने, एच०, Allg. Forstz , 1963, **18**, 107-111.
2. जाजा, ए० टी०, Allg. Forstz, 1962, **22**, 228-232
3. जाजा, ए० टी०, Agrew. Bot. 1966, **40**, 106-120
4. डार्ले, ई० एफ०, Symtomatology of particulate injury to vegetation in Hand book of effects Assessment, vegetation damage. V_1-V_4. Centre for Air environment studies of the Pennsylvanic State University, Pennsylvania, 1972

5. फेथ. डब्ल्यू० एल० तथा अत्कीसोन, ए० ए०, Air pollution, JohnWiley Intersciences, Newyork, 1972, 343

6. लेरमेन, एन०, Cement kiln dust and the bean plant (Phaseolus vulgaris L; Black valentine var.) In depth investigations into plant morphology, physiology and pathology, 1972, Ph. D. thesis, University of California.

7. पाण्डेय, डी० डी० तथा शिम्बा, ए० के०, Adv. Biol. Res., 1985, 3(2),, 74-76.

8. पार्थ सारथी, एम०, अरुणाचलम, एन०, नटराजन, के०, ओव्लीसेमी, सी० तथा रंगास्वामी, जीं०, Indian J. Environ. Hith., 1975, 17(2), 114-120.

9. पीयर्स, सी० जे०, Plant world, 1910, 13, 283-288.

10. वाटसन, डी० जे०, Ann. Bot. N. S., 1947, 11, 41-70.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 38 April 1995 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

फूरियर श्रेणी की (E, 1) (C, 1) संकलनीयता

बी० पी० सिंह तथा एम० पी० सचान
गणित विभाग, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 4, 1995]

सारांश

यह सोचा गया कि फूरियर श्रेणी की $(E, 1)$ $(C, 1)$ संकलनीयता के लिये गुप्ता[6] द्वारा प्रदत्त प्रमेय B के अनुकूल परिणाम प्राप्त करना रोचक तथा महत्वपूर्ण होगा।

Abstract

(E, 1) (C, 1) summability of a Fourier Series. *By* B. P. Singh and M. P. Sachan Department of Mathematics, Govrnment Model Science College, Rewa (M. P).

It was considered interesting and significant to develop a result analogous to theorem B given by Gupta[6] for $(E, 1)$ $(C, 1)$ summability of a Fourier Series.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

परिभाषा 1. माना $\sum_{0}^{\infty} u_n$ एक अनन्त श्रेणी जिसका आंशिक योगफल $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ है। s_n के $(C, 1)$ रूपान्तर का गणितीय माध्य (1.1) द्वारा परिभाषित किया जाता है

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{n} \tag{1.1}$$

यदि $\sigma_n \to s$, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, तो श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ को गणितीय माध्य द्वारा संकलनीय या s तक संकलनीय $(C, 1)$ कहा जाता है बशर्ते s एक स्थिर असली संख्या हो।

परिभाषा 2. यदि

$$E_1^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k \to s \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty, \tag{1.2}$$

हम कहेंगे कि अनन्त श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$, अपने आंशिक योगफल s_n के साथ यूलर $(E, 1)$ माध्यों द्वारा संकलनीय है या केवल s तक संकलनीय $(E, 1)$ है ।

परिभाषा 3

$(E, 1)$ $(C, 1)$ माध्य या अनन्त श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ के आंशिक योगफल S_n का $(E, 1)$ $(C, 1)$ रूपान्तर $\sum_0^\infty \sigma_n$ के $(E, 1)$ रूपान्तर के रूप में परिभाषित किया जाता है । इस प्रकार यदि

$$(EC)_n^1 = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k \to S, \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty, \tag{1.3}$$

तो श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ को S तक संकलनीय $(E, 1)$ $(C, 1)$ कहा जाता है ।

माना कि $f(x)$ असली फलन है जो लेबेस्ग के अनुसार $(-\pi, \pi)$ के अन्तराल में समाकलनीय है और 2π आवर्त के साथ आवर्ती है । माना कि $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी इस प्रकार है—

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_0^\infty A_n(x), \tag{1.4}$$

जहाँ
$$a_m = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\, dt, \; (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_m = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt\, dt, \; (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

हम निम्नलिखित संकेतनों का उपयोग करेंगे, जहाँ x तथा S स्थिर असली संख्याएँ हैं

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\phi_1 (t) = 1/t \int_0^t 0 (u)\, du$$

$$\Phi_1 (t) = \int_0^t |\phi_1 (u)|\, du$$

2. प्रस्तावना

हार्डी[1] तथा नाप[2] ने यूलर संकलनीयता की सामान्य विवेचना की है किन्तु फूरियर श्रेणी की यूलर संकलनीयता पर जिगमुंड[3] ने विचार किया है।

फूरियर श्रेणी की यूलर $(E, 1)$ संकलनीयता सम्बन्धी परिणाम हालैंड, साहनी तथा जिम्बालारियो[4] ने दिया है।

प्रमेय A : यदि

$$\int_0^t |\phi (u)| du = 0 (t), \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0, \tag{2.1}$$

तथा

$$\lim_{n \to \mu} \int_{2\pi/n}^{\eta} \frac{|\phi (t) - \phi(t + 2\pi/n)|}{t} \cos^n (t/2)\, dt = 0 \tag{2.2}$$

जहाँ n अचर है तब $f(x)$ की फूरियर श्रेणी x बिन्दु यूलर (E_1) संकलनीय S तक है।

हार्डी[5] के अनुसार यह ज्ञात है कि यदि $\sum_0^{\infty} u_n$ संकलनीय (E, q), हो तो यह उसी योगफल तक संकलनीय (B) या (B') होता है। हाल ही में गुप्ता[6] में पर्याप्त मुक्त दशा के अन्तर्गत फूरियर श्रेणी की $(B)(C, 1)$ संकलनीयता का अध्यन किया है। उन्होंने सिद्ध किया है कि

प्रमेय B : यदि

$$\Phi_1 (t) = 0 \frac{t}{\log (1/t}, \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0, \tag{2.3}$$

तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर संकलनीय $(B)(C, 1)$ S तक है।

चूँकि $q > 0$ के लिए (E,q) संकलनीयता $q = 1$ के लिए $(E, 1)$ में समानीत हो जाती है अतएव हार्डी के कथित परिणाम[5] को दृष्टि में रखते हुए यह रोचक एवं महत्वपूर्ण होगा कि फूरियर श्रेणी

की $(E, 1)$ $(C, 1)$ संकलनीयता के लिए प्रमेय B के अनुरूप परिणाम प्राप्त किया जाय। इसी लक्ष्य से हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि शर्त (2.3) तुष्ट हो तो फूरियर श्रेणी (1.4) संकलनीय $(E, 1)$ $(C, 1)$ है S तक।

3. प्रमेय की उपपत्ति

फूरियर श्रेणी (1.4) के आंशिक योगफल S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n को निम्न के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\sigma_n - S + 0\,(1) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 (nt/2)}{t}\, \phi\,(t)\, dt \tag{3.1}$$

आंशिक समाकल द्वारा हम

$$\begin{aligned} &\sigma_n - S + 0\,(1) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin^2 nt/2}{t^2}\{t\,\phi_1\,(t)\}\right] \\ &- \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \{t\,\phi_1\,(t)\}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2 nt/2}{t^2}\right) dt \\ &= P - Q,\ \text{माना} \end{aligned} \tag{3.2}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin^2 n\pi/2}{\pi}\ \phi_1\,(\pi)\right] \\ &- \frac{2}{\pi}\lim_{n\to 0}\left[\frac{\sin^2 (nt/2)}{nt}\ .\ \phi_1\,(t)\right] \\ &= 0\,(1) - \frac{2}{\pi}\left[\lim_{t\to 0}\frac{n \sin nt}{2n}\right]\left[\lim_{t\to 0}\phi_1\,(t)\right] \\ &= 0(1) + 0\,(1) = 0\,(1),\ \text{ज्यों ज्यों } n\to\infty \text{ पश्चात् } t\to 0. \end{aligned}$$

अब हम खिंगे कि

$$Q = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \{t\,\phi_1\,(t)\}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2 nt/2}{t^2}\right) dt$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\{t\,\phi_1(t)\}\left[\frac{n\sin nt}{2t^2}-\frac{2\sin^2 nt/2}{t^2}dt\right.$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\sin nt\,dt-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t^2}\sin^2\frac{nt}{2}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)\sin nt}{t}dt$$

$$-\frac{4}{n\pi}\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}+\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\right]\frac{\phi_1(t)}{t^2}\sin^2\frac{nt}{2}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)\sin nt}{t}dt-\frac{4}{\pi}\,[Q_1+Q_2+Q_3],\text{ माना} \tag{3.4}$$

जहाँ $0<\alpha<1/3$.

हमें ज्ञात है कि

$$|Q_1|=1/n\int_0^{1/n}\frac{|\phi_1(t)|}{t^2}\,0\,(n^2t^2)\,dt$$

$$=\int_0^{1/n}|\phi_1(t)|\,dt$$

$$=O(n)\,O\left\{\frac{1/n}{\log n}\right\},\ (2.3)\text{ से}$$

$$=O(1),\text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty. \tag{3.5}$$

और भी, आंशिक समाकलन तथा (2.3) से

$$|Q_2|\leqslant 1/n\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}\frac{|\phi_1(t)|}{t^2}\,dt$$

$$=0(1)\left[0\left\{\frac{1}{\log 1/t}\right\}_{1/n}^{1/n^{\alpha}}+\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}0\left\{\frac{1}{t\log(1/t)}dt\right\}\right]$$

$$=0(1)+0(1)\left[-\log\log(/t)\right]_{1/n}^{1/n^{\alpha}}$$

$$=O(1)+O\{\log(1/\alpha)\}.$$

$$=O(1)+O(1)=G(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty,$$

क्योंकि $0<\alpha<1/3$.

इसके बाद भी हम पाते हैं कि

$$|Q_3|=1/n|\int_{1/n^\alpha}^{\pi}\frac{t\phi_1(t)}{t^3}\sin^2(nt/2)\,dt|$$

$$\leqslant\frac{n^{3\alpha}}{n}\int_{1/n^\alpha}^{\pi}|\{t\,\phi_1(t)\}|\;dt$$

$$=0\left(\frac{1}{n^{1-3\alpha}}\right).\,0(1)$$

$$=O(1)\;O(1)=O(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty,$$

$\int t\,\phi_1(t)\}$ के सातत्य अंश से एवं चूंकि $0<\alpha<1/3$.

(3.2) से लेकर (3.7) के परिणामों के फलस्वरूप

$$\sigma_n-S+0(1)=1/\pi\int_0^\pi\frac{\phi_1(t}{t}\sin nt\,dt+0(1) \text{ प्राप्त होता है।}$$

अब σ_1 के $(E,1)$ रूपान्तर को यानी आंशिक योगफल S_n के $(E, 1)$ $(C, 1)$ रूपान्तर को $(EC)_n{}^1$, द्वारा द्योतित करने पर संकलन विधि की नियमितता के फलस्वरूप हमें (3.8) प्राप्त होता है।

$$(EC)_n^1-S+0(1)=\frac{2^{-n}}{\pi}\int_0^\pi\frac{\phi_1(t)}{t}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kt\right\}dt$$

$$=\frac{2^{-n}}{\pi}\int_0^\pi\frac{\phi_1(t)}{t}.\,Im\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{}{k}e^{ikt}\right]dt$$

$$=\frac{2^{-n}}{\pi}\int_0^\pi\frac{\phi_1(t)}{t}Im\left[\left(1+e^{it}\right)^n\right]dt$$

$$=\frac{2^{-n}}{\pi}\int\frac{\phi_1(t)}{t}(2\cos t/2)^n \sin nt/2\,dt$$

$$=1/\pi\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}+\int_{1/n^{\alpha'}}^{\pi}\right]\frac{\phi_1(t)}{t}\cos^n t/2\sin nt/2\,dt$$

$$=1/\pi\left|J_1+J_2+J_3\right| \text{ माना} \tag{3.8}$$

जहाँ $0<\alpha'<1/2$.

$$[J_1]=\int_0^{1/n}\frac{|\phi_1(t)|}{t}\;0(nt)\,dt$$

$$=0(n)\int_0^{1/n}|\phi_1(t)|\,dt$$

$$=0(n)\,0\left\{\frac{1/n}{\log n}\right\}=2(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty, \ (2.3) \text{ से} \tag{3.9}$$

पुन : खण्डशः समाकलन करने तथा (2.3) का उपयोग करने से

$$|J_1|=\left|\int_{1/n}^{1/n^{\alpha'}}\frac{\phi_1(t)}{t}\cos^n t/2\sin nt/2\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_{1/n}^{1/n^{\alpha'}}\frac{|\phi_1(t)|}{t}\,0(1)\,dt$$

$$=O(1)\left[o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right)+O\left(\frac{1}{t\log 1/t}\right)\right]_{1/n}^{1/n^{\alpha'}}$$

$$=O(1)+O(\log 1/\alpha'$$

$$=o(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty, \text{ क्योंकि } o<\alpha'<1/2 \tag{3.10}$$

J_2 के मूल्यांकन के लिए हमें निम्नलिखित (estimates) की आवश्यकता होगी

$$\cos^n(t/2)=(1-2\sin^2 t/4)^n\leqslant\left(1-\frac{2t^2}{4\pi^2}\right)^n, \ \text{since } \sin t/2\geqslant t/\pi \text{ for } o\leqslant t\leqslant\pi$$

$$\leqslant\left\{1-\frac{(nt^2/2\pi^2)}{n}\right\}^n$$

$$=O\{e^{-(nt^2/2\pi^2)}\}, \ \text{क्योंकि}\left(1-\frac{X}{n}\right)^n\to e^{-X},$$

ज्यों ज्यों $n\to\infty$. ज्यों ज्यों $n\to\infty$

उपर्युक्त का उपयोग करने पर

$$|J_3| = \left| \int_{1/n^{\alpha'}}^{\pi} \frac{\phi_1(t)}{t} \cos^n(t/2) \sin(nt/2)\, dt \right|$$

$$\leqslant \int_{1/n^{\alpha'}}^{\pi} \frac{|\{t\,\phi_1(t)|}{t^2}\ O\left\{e^{\frac{-nt^2}{2\pi^2}}\right\} dt$$

$$= O\left|\frac{n\alpha'}{\left\{e^{n/2\pi^2}\left(\frac{1}{n^{2\alpha'}}\right)\right\}}\right|_{1/n^{\alpha'}} |t\,\phi_1(t)|\, dt$$

$$= O\left|\frac{n^{2\alpha'}}{e^{(n^{1-2\alpha}/2\pi^2)}}\right| O(1)$$

$$= O(1)\, O(1) = O(1),\ \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty. \tag{3.11}$$

चूंकि $O < \alpha' < 1/2$ एवं समाकल $\int \phi^1(t)|\, dt$ के सातत्य अंश से।

(3.8) से लेकर (3.11) के परिणामों के संकलन से

$(EC)_n^1 S = O(1)$, ज्यों ज्यों $n \to \infty$ प्राप्त होता है।

इस तरह प्रमेय x की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय प्रो० पी० चन्द्र के कृतज्ञ हैं जिन्होंने इस प्रपत्र के विषय में उपयोगी सुझाव दिए।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series आक्स फोर्ड, 1967, अध्याय VIII तथा IX, पृष्ठ 178-226.
2. नाप, के० Math. Z. 1922, 15 226-253, 1923, **18** 125-156.
3. जिगमुंड, ए०, Trigometric Series, Cambridge University Press, द्वितीय संस्करण 1968.
4. हालैंड, ए० एस० बी०, साहनी, बी० एन० तथा जिम्बातारियो, जे०, Bollatino, U. M. I. 1975, **12** (4) 315-320.
5. हार्डी जी० एच०, Divergent series, Oxford 196, पृष्ठ 183 प्रमेय 128.
6. गुप्ता, आर० आर० The Vikram (A Jour. of Vikram Univ. Ujjain) 1978, **12** (1-3), 109-116.

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

जैकोबी प्रसार द्वारा फलन का सन्निकटन

कु॰ मनीषा शर्मा
गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—नवम्बर 30, 1994]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य अन्तिम बिन्दुओं पर जैकोबी श्रेणी के आंशिक योगफल के वर्ग अनुमान प्राप्त करना है।

Abstract

Approximation of a function by its Jacobi expansion. *By* Manisha Sharma, Department of Mathematics, Vikram University, Ujjain (M. P.)

The object of this paper is to obtain the order estimate of partial sum of Jacobi series at the end points.

1. माना कि $f(x)$ कोई फलन है जो $[-1, 1]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) \in L[-1, 1],\ \alpha > -1,\ \beta > -1$$

फलन $f(x)$ के लिए जैकोबी श्रेणी निम्न प्रकार परिभाषित है—

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{1.1}$$

जहाँ

$$a_n = \frac{1}{J_n}\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx \tag{1.2}$$

तथा

$$J_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2^{n+\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\, \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1).\, \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है।

श्रेणी (1.1) के लिये गुप्ता[1] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किये हैं—

प्रमेय (अ)—यदि

$$\alpha > -\tfrac{1}{2},\ \beta > -\tfrac{1}{2},\ 0 \leqslant k \leqslant (\alpha+\tfrac{1}{2},\ \beta+\tfrac{1}{2})$$

तथा समाकलन

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+k/2-1/4}.\ (1+x)^{\beta+k/2-1/4}.\ f(x)dx$$

एवं

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\beta+k/2-1/4}.\ (1+x)^{\alpha+k/2-1/4}.\ f(x)dx$$

का अस्तित्व है तो

$$S_n(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v P_v^{(\alpha,\beta}(x) = 0\ (n^k) \tag{1.3}$$

यदि

$$0 \leqslant k \leqslant (\alpha+\tfrac{1}{2},\ \beta+\tfrac{1}{2})$$

$$= 0\ (\log n)$$

यदि $k=0$ केन्द्र $[-1, 1]$ में x के प्रत्येक मान के लिए

प्रमेय (ब)—यदि

$$\int_0^t \phi^{2\alpha+1} \mid f(\cos\phi) - A \mid d\phi = 0\ (t^{2\alpha+2} \log 1/t) \tag{1.4}$$

तथा

$$\int_{-1}^{a} \frac{1+(x)}{(1+x)^{1-s/2}}\, dx < \infty \tag{1.5}$$

यदि

$$-1 < a < 1,\ s < 1$$

जहाँ

(i) $s < 2\beta+1$ और $s \leqslant \beta - \alpha$ यदि $^{J} > -\frac{1}{2}$

(ii) $s<2\beta+1$ यदि $\beta\leqslant-\frac{1}{2}$

तो

$$S_n(1)-A=0\ (\log n)$$

यदि $\alpha<-\frac{1}{2}$

हम लिखेंगे—

$$F(w)=\{f(\cos w)-A\},\ 0\leqslant w\leqslant\pi \tag{1.6}$$

जहाँ A एक स्थिरांक है।

हम निम्नलिखित प्रमेय को स्थापित करेंगे।

प्रमेय :—

$$|F(w\pm t)-F(w)|=0\ (t^{\alpha+1/2}\ \lambda(1/t))$$

ज्यों ज्यों $t\rightarrow 0$ (1.7)

तो

$$S_n=0\ (\lambda(n)),\qquad \text{ज्यों ज्यों } n\rightarrow\infty$$

$$\theta=0,\ \text{पर}\qquad -\tfrac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\tfrac{1}{2},\ \beta\geqslant-\tfrac{1}{2} \tag{1.8}$$

$\lambda(t)$, $t>0$ एक वर्द्धमान फलन है तथा

$$\int_n^\infty \frac{\lambda(t)}{t^{\alpha+3/2}}\ dt=0\left(\frac{\lambda(n)}{n^{\alpha+1/2}}\right).$$

2. प्रमेय की उपपत्ति के लिये हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 :

माना कि α तथा β कल्पित एवं सत्य हैं और C एक स्थिर अचर है $n\rightarrow\infty$ तो

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\ \theta)=\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2}\ O(n^{-1/2});\ c/n\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ O(n^{\alpha});\ O\leqslant\theta\leqslant c/n\end{cases} \tag{2.1}$$

प्रमेयिका 2 :

चूंकि $c/n\leqslant\theta\pi\leqslant c-/n$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=n^{-1/2}\ K(\theta)\left[\cos\left\{\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\theta+\nu\right\}+\frac{O\ (1)}{n\sin\theta}\right] \tag{2.2}$$

$$K(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2};\ \nu=-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

3. प्रमेय की उपपत्ति :—

$x=\cos\theta$ के लिये श्रेणी

$$S_n(\cos\theta)=\sum_{v=0}^{n}a_v P_v^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\cdot\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}f(\cos w)$$

$$\times\sum_{v=0}^{n}J_v P_v^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\ P_v^{(\alpha,\beta)}(\cos w)\,dw$$

$$S_n(1)=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\cdot\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\cdot f(\cos w)$$

$$\times\sum_{v=0}^{n}J_v P_v^{(\alpha,\beta)}(1)P_v^{(\alpha,\beta)}(\cos w)\,dw$$

अत:

$$S_n(1)-A=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\cdot\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\times f(w)$$

$$.m_n P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos w)\,dw$$

जहाँ

$$m_n=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot n^{\alpha+1}$$

अब

$$S_n(1)-A=\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}$$

$$=I_1+I_2+I_3 \tag{3.1}$$

सर्व प्रथम हम I_1 का मान ज्ञात करेंगे।

$$I_1=O\left(n^{2\alpha+2}\right)\int_0^{1/n}w^{2\alpha+1}\ |F(w)|\ dw\ (2.1)\text{ से}$$

$$=O(n^{2\alpha+2})\int_0^{1/n} w^{2\alpha+1}w^{\alpha+1/2}\lambda\left(\frac{1}{w}\right)dw$$

$$=O(n^{2\alpha+2})\int_0^{1/n} w^{3\alpha+3/2}\ \lambda\ \left(\frac{1}{w}\right)dw$$

$$=O((n^{\alpha+2})\lambda(n)).\int^{1/n} w^{3\alpha+3/2}dw$$

$$=O(\lambda(n).\ n^{2\alpha+2}).\ \frac{1}{n^{3\alpha+3/2}}$$

$$=O(\lambda(n))\ \text{ज्यों-ज्यों}\ n\to\infty \tag{3.2}$$

I_3 का मान ज्ञात करते समय हम निम्न सम्बंध का प्रयोग करते हैं ।

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$$

और यह पाते हैं कि

$$I_3=2^{\alpha+\beta+1}\int_{\pi-1/n}^{\pi}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}.\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}.\ F(w)$$

$$.\ m_n P^{(\alpha+1,\beta)}(\cos w)\ dw$$

$$=O\int_0^{1/n}\Big/\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}.\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\ F(\pi-w)\Big|.\ n^{\alpha+1}\,n^{\beta}\,dw$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1})\int_0^{1/n} w^{2\beta+1}\,dw$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1})\left[w^{2\beta+2}\right]_0^{1/n}$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1}).\frac{1}{n^{2\beta+2}}$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1-2\beta-2})$$

$$=O(n^{\alpha-\beta-1}) \quad 3.3))$$

अंत में I_2 का मान ज्ञात करेंगे ।

$$I_2=2^{\alpha+\beta+1}\int_{1/n}^{\beta-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{3\alpha+1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}F(w)$$

$$.\ m_n P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos w)\,dw$$

$$=B.\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}F(w)[n^{\alpha+1/2}, n^{-1/2}$$

$$\left(\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{-\alpha-3/2}\right)\times\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-\beta-1/2}\cos\left\{\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w+v\right\}$$

$$+O(1)\,(n\ \sin w)^{-1}]\,dw$$

जहाँ B एक स्थिरांक है ।

$$=B(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\ \frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2}F(w).$$

$$\times\left[\cos v\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w+\sin v\ \sin\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w\right.$$

$$+O(1)\,(n\ \sin w)^{-1}]\,dw$$

$=I_{2\cdot1}+I_{2\cdot2}+I_{2\cdot3}$ कल्पना से

जहाँ

$$I_{2\cdot1}=B.(n^{\alpha+1/2}\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2}.\left(\cos\ \frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2}.\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w$$

$$.F(w)\,dw$$

$$=\frac{B}{2}..\ (n^{\alpha+1/2})\ \left[\left(\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\ \frac{w}{2}\right)\right)^{\beta+1/2}\right.$$

$$\times\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w.F(w)\ dw$$

$$-\int_{1/n-\mu_n}^{\pi-1/n-\mu_n}\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\cdot\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2}\cdot F(w+\mu_n)$$

$$\times\cos\left(n\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w\,dw\Big]$$

$$=B.\,(n^{\alpha+1/2})\,(J_1+J_2+J_3+J_4) \tag{3.5}$$

$$\mu_n=\frac{\pi}{n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1}$$

जहाँ

$$|J_1|\leqslant\int_{\pi-1/n-\mu_n}^{\pi-1/n}\left|\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2}\cdot\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2}F(w)\right|dw$$

$$=\int_{1/n}^{1/n-\mu_n}w^{\beta+1/2}\,dw$$

$$=O(n^{-\beta-3/2}) \tag{3.6}$$

$$|J_2|=\int_{1/n-\mu_n}^{1/n}\left|\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2}F(w+\mu_n)\right|dw$$

$$=\int_{1/n-\mu_n}^{1/n}w^{\alpha-1/2}\,w^{\alpha+1/2}\lambda\left(\frac{1}{w}\right)dw$$

$$=O(\lambda(n))\int_{1/n-\mu_n}^{1/n}w^{\alpha-1/2}\cdot w^{\alpha+1/2}\,dw$$

$$=O(n^{-}{}_{3}{}^{\alpha-1}\cdot\lambda(n)),\ \text{जैसे-जैसे}\ n\to\infty \tag{3.7}$$

$$|J_3|=\int_{1/n}^{\pi-1/n-\mu_n}\left|\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\cdot\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2}\right|$$

$$\cdot\,|F(w+\mu_n)-F(w)|\,dw$$

$$=O\left(\mu_n^{\alpha+1/2}\lambda(n)\right)\int_{1/n}^{\pi-1/n-\mu_n}\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}$$

$$\cdot\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2}\Big|\,dw$$

$$=O\,(n^{-\alpha-1/2}\,\lambda(n)),\ \text{ज्यों-ज्यों}\ n\to\infty \tag{3.8}$$

$$|J_4| = \int_{1/n}^{\pi-1/n-\mu_n} |F(w)| \left| \left(\sin \frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2} - \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2} \cdot \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2} \right| dw$$

$$= O(\mu_n) \int_{1/n}^{\pi-1/n-\mu_n} |F(w)| \frac{d}{dw} \left\{ \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2} \right\} dw$$

$$= O(n^{-1}) \qquad (3.9)$$

(3.6)...(3.9) को संयुक्त करने पर

$$SI_{2\cdot1} = O(\lambda(n)), \text{ जैसे-जैसे } n \to \infty \qquad (3.10)$$

$I_{2\cdot2}$ एवं $I_{2\cdot3}$ का मान ज्ञात करने पर

$$I_{2\cdot2} \text{ व } I_{2\cdot3} = O(1)$$

$$SI_2 = O(\lambda(n)), \text{ जैसे-जैसे } n \to \infty \qquad (3.11)$$

अब (3.2) (3.3) तथा (3.11) से

$$S_n = O(\lambda(n)) \text{ जैसे-जैसे } n \to \infty \qquad (3.12)$$

इस प्रकार प्रमेय पूर्णतया स्थापित हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डॉ० बी० के० व्यौहार ने जो मार्ग-दर्शन एवं प्रोत्साहन प्रदान किया, उसके लिये लेखिका उनकी कृतज्ञ है ।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी० तथा साहनी, बी० एन०, The Math. Student, 1974, XLII, 337-343·
2. जेगो, जी० Orthagonals Polynomials. कलोकियम पब्लि० अमे० मैथ सोसायटी, न्यूयार्क संस्करण 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

राजस्थान के सरीसृप

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना,
झाडोल (फ०), जिला-उदयपुर (राज०) 313 702

[प्राप्त | जनवरी 1, 1995]

सारांश

राजस्थान भारत का सबसे शुष्क प्रदेश है, जो अनेक सरीसृपों को उत्तम आवास प्रदान करता है। यहाँ पर 33 प्रजातियों के असर्पीय सरीसृप पाये जाते हैं। राजस्थान के सरीसृपों को अनेक संकटों का सामना करना पड़ रहा है। जनसाधारण को शिक्षित करके इन सरीसृपों को बचाया जा सकता है।

Abstract

Reptiles of Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.), Dist. Udaipur, (Raj.), 313 702.

Rajasthan is considered to be the most arid state of India. It provides suitable habitat to many reptiles. As many as 33 non-serpent species of reptiles have been recorded from the State of Rajasthan. Reptiles of this State are facing many problems for their existence. We can save them only by making public aware en mass.

सरीसृपों के शरीर की बनावट ऐसी विचित्र होती है कि कुछ पानी मे, कुछ शुष्क क्षेत्रों में एवं कुछ वृक्षों पर आसानी से जीवन-यापन कर लेते हैं। शरीर पर शल्कों की उपस्थिति एवं द्रव अवस्था में मूत्र न त्याग कर ठोस अवस्था में त्यागने के कारण अनेक सरीसृप पानी का संरक्षण करते हैं तथा आसानी से शुष्क क्षेत्रों में जीवन-यापन कर लेते हैं। अपनी इसी विशेषता के कारण अनेक सरीसृप राजस्थान के अर्द्ध-शुष्क एवं शुष्क क्षेत्रों में बहुतायत से मिलते हैं।

राजस्थान के सरीसृपों पर बहुत अनुसन्धान हो चुका है। यहाँ के सरीसृपों सम्बन्धी कार्य की झलक ओफेनबर्ग[1], ओफेनबर्ग तथा साथी[2], भूपति तथा कुमार[3], भूपति तथा विजयन[4], डेनियल[5], फ्रेजियर[6], जार्ज[7-8], खान[9], मैक कैन[10], मॉल[11-12], राव तथा चौधरी[13], राव तथा सिंह[14], शर्मा[15], शर्मा[16-24], स्मिथ[25], सोमन[26], व्यास[27] आदि के कार्यों से मिलती है। उपर्युक्त अध्ययनों का जायजा लेने के बाद तुरन्त ही यह नहीं कहा जा सकता कि राजस्थान में कितनी किस्मों के सरीसृप मिलते हैं। प्रस्तुत पत्र में निजी प्रेक्षणों एवं पूर्ववर्ती अध्ययनों की सहायता लेकर राजस्थान में मिलने वाले सरीसृपों की सूची तैयार की गई है। सरीसृप वर्ग में मगर, घड़ियाल, कछुये, साँप, छिपकलियाँ आदि सम्मिलित हैं। शर्मा[24] द्वारा राजस्थान के साँपों की सूची पहले ही तैयार कर दी गई है अत: शेष सरीसृपों की सूची एवं उनसे सम्बन्धित अन्य पहलू यहाँ प्रस्तुत किये जा रहे हैं।

अध्ययन क्षेत्र एवं उसकी पारिस्थितिकी

प्रस्तुत सर्वे राजस्थान राज्य से सम्बन्धित है। राजस्थान में भारत के अन्य सभी राज्यों की तुलना में कम वर्षा होती है। इस प्रान्त में 100 मि० मी० से 800 मि० मी० तक वर्षा होती है। मोटे तौर पर राज्य को तीन भागों में बाँटा जा सकता है। पूर्वी मैदानी भाग, पश्चिमी थार का रेगिस्तान एवं इन दोनों के बीच मे अरावली पर्वतमाला का विस्तार। दक्षिणी-पूर्वी एवं दक्षिण राजस्थान सर्वाधिक वर्षा वाले भाग हैं। इन क्षेत्रों में चम्बल, काली सिंध, पार्वती, माही, मानसी-वाकल, सोम जैसी नदियाँ एवं अनेक झीलें, बाँध एवं जलाशय हैं। इन क्षेत्रों में वनों की सघनता भी अच्छी है। वर्षा की मात्रा क्रमश: पश्चिम की ओर घटती जाती है तथा जैसलमेर तक पहुँचते-पहुँचते वार्षिक वर्षा 100 मि० मी० तक रह जाती है। पश्चिमी राजस्थान में रेतीले टीलों का फैलाव है तथा जहाँ-तहाँ शुष्कोद्भिद् वनस्पति का फैलाव है। पश्चिमी राजस्थान में इन्दिरा गाँधी नहर के आने से पारिस्थितिक परिवर्तन होने लगे हैं।

प्रयोगात्मक

सरीसृप के अध्ययन हेतु विविध आवास—जैसे रेत के टीले, पहाड़ी क्षेत्र, झीलें, नहरें, नदियाँ, तालाब, वन-क्षेत्र आदि का सर्वे करके विभिन्न सरीसृपों सम्बन्धी जानकारी संग्रह की गई। वन विभाग तथा अन्य विभागों के कार्यक्षेत्रों में तथा कृषि-क्षेत्र में बिना पैरापेट दीवार वाले कुओं एवं हौजों का निरीक्षण किया गया। पैरापेट की अनुपस्थिति के कारण अनेक सरीसृप दुर्घटनावश कुओं, हौजों, नहरों आदि में गिर जाते हैं (शर्मा[22])। सड़कों पर भी दुर्घटनाग्रस्त होकर अनेक सरीसृप मारे जाते हैं या घायल हो जाते हैं (शर्मा[28])। भवनों के अहातों के सामने बने 'काउकैचर पिट' में भी सरीसृप गिर जाते हैं तथा बच कर बाहर निकलने में असमर्थ होते हैं। ऐसे सभी स्थानों में सरीसृपों का अवलोकन बहुत उपयोगी होता है। सड़कों के डामरीकरण के दौरान व्यर्थ बहे डामर में भी कई बार सरीसृप फँसे हुए मिल जाते हैं। उपलब्ध साहित्य का भी अवलोकन कर राजस्थान के सरीसृपों के बारे में महत्वपूर्ण सूचनायें संग्रह की गई हैं। प्रेक्षण के बाद पकड़े गये प्राणियों को उनके मूल आवास में सुरक्षित छोड़ दिया गया।

आदिवासी क्षेत्रों में कथोडी, भील, गरासिया, सहारिया आदि जातियों से भी सरीसृप के बारे में महत्वपूर्ण सूचनायें संग्रह की गई हैं।

परिणाम तथा विवेचना

राजस्थान में सरीसृपों की पर्याप्त विविधता पाई जाती है (सारणी-1)। सारणी के अवलोकन से स्पष्ट होता है कि गैर-सर्पीय (Non-serpent) सरीसृपों के 10 कुल, 23 वंश तथा 33 जातियाँ राजस्थान के भौगोलिक क्षेत्र में पायी जाती हैं।

राजस्थान में सरीसृपों का वितरण

राजस्थान के दक्षिण-पूर्वी भाग में सदा बहने वाली चम्बल नदी में मगर तथा घड़ियाल साथ-साथ (सिम्पेट्रिक) निवास करते पाये जाते हैं। जैसे-जैसे दक्षिण की तरफ बढ़ते हैं, केवल मगर अकेला (एलोपेट्रिक) वितरण में रह जाता है[13,16]। उदयपुर क्षेत्र में बड़ी झीलों एवं तालाबों, बाँधों एवं नदियों में मगर पाया जाता है हालांकि इस क्षेत्र में संख्या धीरे-धीरे घटने लगी है।

जलीय कछुये पूर्वी, दक्षिणी-पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान में अधिकता से पाये जाते हैं। चम्बल, गम्भीरी, बाणगंगा आदि नदियों, रामगढ़ झील (जयपुर), फतहसागर, पिछोला, बाघदड़ा, बड़ी तालाब, जयसमंद झील (उदयपुर), राजसमंद, सिलीसेढ़ बाँध (अलवर), घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर आदि जलीय कछुओं के अच्छे निवास हैं। वैसे हर छोटे-बड़े तालाब में कछुये मिल जाते है[3,4,11,13,14]। थलीय कछुआ जोयोकीलोन एलीगेंस मध्य राजस्थान एवं अरावली क्षेत्र के शुष्क-पथरीले क्षेत्र में निवास करता है। यह कछुआ सैंदड़ा (पाली), सरिस्का (अलवर) तक उत्तरी भाग में फैला पाया जाता है (फ्रेजियर[6]। दक्षिणी राजस्थान में राजसमंद व उदयपुर जिलों मे यह कछुआ काफी संख्या में मिलता है। नाथद्वारा, मावली (राजसमंद), भटेवर, भीण्डर, खेखाड़ा, झाडोल, सिसारमा, गोगुन्दा, कुंभलगढ़, सीतामाता अभयारण्य, फुलवारी की नाल अभयारण्य (उदयपुर) आदि स्थानों में इन कछुओं को देखा गया है। एक कछुआ विश्व वानिकी वृक्ष उद्यान, जयपुर, के स्टाफ द्वारा जयपुर शहर की पूर्वी परिधि पर 1990 में पकड़ा गया।

घरेलू छिपकली हेमीडेक्टाईलस फ्लेवीविरिडिस, कैलोटीज वर्सीकलर, वेरेनस बंगालेन्सिस लगभग सारे राजस्थान में मिलती हैं। केमिलियोन जाईलेनिकस दक्षिण राजस्थान के वनों में देखी गयी है। वेरेनस ग्रिसियस पश्चिमी राजस्थान में पायी जाती है। पश्चिमी राजस्थान में ही टोड हेड एगमा, सैन्ड फिश, सान्डा, जर्डन स्नेक आई आदि बहुतायत में मिलते हैं। सैन्ड फिश जयपुर शहर के पूर्वी छोर पर भी पाई गई है शर्मा[21]। सान्डा पश्चिमी राजस्थान में रामदेवरा कस्बे के आस-पास बहुत मिलता है। अलवर जिले में बडोंद की रुन्द (क्लोज एरिया) में भी सान्डा देखा गया है। जर्डन स्नेक आई मध्य एवं पूर्वी राजस्थान के उन क्षेत्रों में भी मिलती है जहाँ रेत का जमाव अधिक है। पथरीले एवं कठोर-चिकनी मिट्टी वाले क्षेत्रों में यह प्राणी अनुपस्थित है। दक्षिणी राजस्थान में इस प्राणी के होने के कोई संकेत नहीं हैं।

सारणी 1

राजस्थान के सरीसृपों की सूची

कुल	सरीसृप का वैज्ञानिक नाम	अँग्रेजी नाम	राजस्थान में स्थानीय नाम	विषैला/विषहीन	ज्ञात मुख्य वितरण क्षेत्र
1. **क्रोकोडाईलिडी** (Crocodylidae)					
	1.1.1 **Crocodylus palustris**	Mugger Marsh Crocodile	मगर, मगरमच्छ, मंगोर	विषहीन	चम्बल नदी क्षेत्र, दक्षिण राजस्थान की नदियाँ व जलाशय
	1.2.2 **Gavialis gangeticus**	Gharial Long-snouted Crocodile	घड़ियाल	विषहीन	चम्बल नदी क्षेत्र
2. **एमीडिडी** (Emydidae)					
	2.1.3 **Kachuga tecta**	Indian Sawback Roofed Terrapin	कछुआ	विषहीन	दक्षिण-पूर्वी एवं पूर्वी राजस्थान
	2.2.4 **K. tentoria ciroumdata**	Deccan Sawback Terrapin	,,	,,	,,
	2.3.5 **K. dhongoka**	Dhoor, Dhongoka Terrapin	,,	,,	,,

	2.4.6 **K Kachuga**	Sail Terrapin	,,	,,	चम्बल नदी क्षेत्र
	2.5.7 **Hardella thuagii**	Brahminy Terrapin	,,	,,	दक्षिण-पूर्वी एवं पूर्वी राजस्थान
	2.6.8 **Geoclemys hamiltonii**	Kali Kauntha Spotted Black Terrapin	,,	,,	पूर्वी राजस्थान
3. ट्रायोनिशडी (Trionychidae)					
	3.1.9 **Lissemys punctata punctata**	Indo-Gangetic Mud turtle, Flap-shell	,, काचबा	,,	दक्षिणी, दक्षिण-पूर्वी एवं पूर्वी राजस्थान
	3.2.10 **Chitra indica**	Chitra Turtle	कछुआ	,,	चम्बल नदी
	3.3.11 **Trionyx gangeticus**	Ganges Soft shell	,,	,,	पूर्वी राजस्थान
	3.4.12 **T. hurum**	Peacock Soft shell	,,	,,	पूर्वी राजस्थान
4. टेस्ट्युडिनिडी (Testudinidae)					
	4.1.13 **Geochelone elegans**	Starred Tortoise	,, भूमि कछुआ काचबा	,,	अरावली पर्वतमाला क्षेत्र, मध्य एवं दक्षिणी राजस्थान

5. जीकोनिडी (Gekkonidae)					
5.1.14	**Hemidactylus flaviviridis**	Northen House Geoko	छिपकली, विशामरा	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
5.2.15	**H. brooki**	Brook's Geoko	छिपकली	,,	पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान
5.3.16	**H. triedrus**	—	—	,,	अजमेर
5.4.17	**H. lesochenaulti**	—	—	,,	जैसलमेर
5.5.16	**Eublepharis Macularis**	Fat-tailed Geoko	,, बिजली गोहेडा	,	पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान
6. एगमिडी (Agamidae)					
6.1.19	**Calotes versicolor**	Common Garden Lizard, Blood Sucker	गिरगिट, कणगेटिया, कणगेटा, किकांटियो, किलकांटियो	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
6.2.20	**Sitana Ponticeriana**	Fan-Throated Lizard	—	,,	दक्षिणी राजस्थान
6.3.21	**Uromastyx hardwickii**	Spiny-tailed Lizard	सान्डा	,,	पश्चिमी एवं पूर्वी राजस्थान

7. कैमीलियोनिडी (Chamaeleonidae)					
7.1.22	**Chamaeleon zeylanious**	Indian Chameleon	गिरगिट, हालनविया, हालणिया	,,	दक्षिणी राजस्थान
8. सिनसिडी (Scincidae)					
8.1.23	**Mobuya carinata**	Common or Brahminy Skink	साँप की बामणी बामलेटी, नागरबामणी, बामणी	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
8.2.24	**M. dissimlis**	Striped Grass Skink	,,	,,	अजमेर
8.3.25	**Riopa punctata**	Snake Skink	,,	,,	पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान
8.4.26	**Eumeces taeniolatous**	—	,,	,,	पश्चिमी राजस्थान
8.5.27	**Ophiomorus tridactylus**	Sandfish	गीतरोली	,,	पश्चिमी एवं पूर्वी राजथान

9. लेसर्टिडी (Lacertinae)					
	9.1.28 **Opisops jerdoni**	Jerdon's Snake-eye	—	,,	पश्चिमी एवं पूर्वी राजस्थान
	9.2.29 **O Microlepis**	—	—	,,	अजमेर
	9.3.30 **Eremias guttulata**	—	—	,,	जैसलर
	9.4.31 **Ablepharus grayanus**	—	—	,,	माउन्ट आबू
10. वेरेनिडी (Varanidae)					
	10.1.32 **Vnranus bengalensis**	Common Indian Monitor	पाटागोह, पाटलागोह, गोहेरा चन्दन गोह, गोहेली	,,	सम्पूर्ण रास्थान
	10.2.33 V. **griseus**	Desert Monitor	,,	,'	पश्चिमी राजस्थान

ब्रुक जीको प्रायः वृक्षों पर, मिट्टी-पत्थरों के ढेरों आदि में मिल जाती है। ब्रुक जीको जयपुर (शर्मा[19]), डूँगरपुर, उदयपुर से संग्रह की गई है। फेट-टेल्ड जीको अलवर जिले के ततारपुर गाँव में (शर्मा[16]) पकड़ी गई। यह छिपकली उदयपुर जिले के कमलनाथ आरक्षित वन क्षेत्र में भी पकड़ी गई है। चूँकि ततारपुर तथा कमलनाथ अरावली पर्वतमाला के दोनों छोरों पर हैं अतः ऐसा प्रतीत होता है कि पूरे अरावली आवास में यह छिपकली मिलती है। फैन-थ्रोटेड लिजार्ड दक्षिण अरावली वन क्षेत्र में झाडोल, ओडा, सोम, फुलवारी की नाल अभयारण्य, कमलनाथ आदि क्षेत्रों में पकड़ी गई है।

राजस्थान में सरीसृपों के संरक्षण की समस्यायें एवं संरक्षण के उपाय

राजस्थान में सरीसृपों के संरक्षण की कई समस्यायें हैं। कुछ का विवरण निम्नवत् है :

1. सूखा

वर्षा की कमी एवं बार-बार के सूखे के कारण जल-स्रोतों में पानी की कमी आ जाती है। विशेषतया गर्मी के दिनों में ज्यादा समस्या हो जाती है। चम्बल जैसी नदी में पानी की गहराई में आई कमी मगर एवं घड़ियाल के अस्तित्व के लिये चिन्ता का विषय है। सूखा पड़ने पर मगर व कछुये दूसरे उपयुक्त स्थानों की तरफ पलायन करने लगते हैं तथा मनुष्य एवं दूसरे शत्रुओं द्वारा मारे जाने की सम्भावना से घिर जाते हैं। कई प्राणी नष्ट भी हो जाते हैं। सूखा पड़ने पर स्थान के लिये कछुओं में संघर्ष तेज हो जाता है तथा स्वजाति-भक्षण की घटनायें होने लगती हैं। ऐसा घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर में देखा गया है (जोर्ज[7])। पानी की कमी से कछुओं तक गिद्ध व दूसरे शत्रु जीव आसानी से पहुँच जाते हैं तथा उन्हें मार डालते हैं। परभक्षी सबसे पहले प्रायः जीवित कछुओं के पैरों को नोचते हैं। घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर में ठुंठनुमा पैरों वाले **लेसिमिस पंक्टाटा** जाति के कछुओं का मिलना यह साबित करता है (जोर्ज[7])। यह कछुआ आक्रमण के समय अपने पैरों को कवच में समेटता है लेकिन **नियोफ्रान पर्कनोप्टेरस** जाति के गिद्ध लम्बी चोंच के कारण आक्रमण करने में सफल हो जाते हैं (ओफेनबर्ग[1])।

वन क्षेत्रों को पुनः आबाद कर, वर्षा-चक्र को नियमित करके, बाँधों में सिंचाई के बाद इतना पानी शेष रखा जाकर कि गर्मी में पूरा तल सूख न पाये, घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर जैसे आवासों में पम्पसेट द्वारा पानी पहुँचा कर इस समस्या पर नियन्त्रण के कुछ प्रयास किये जा सकते हैं।

2. बाढ़

कभी-कभी जल ग्रहण क्षेत्रों में अचानक ज्यादा वर्षा हो जाने के कारण बाढ़ आ जाती है। बाढ़ से बह कर सरीसृप दूर-दूर तक चले जाते हैं। बाढ़ का प्रकोप समाप्त हो जाने पर मूल आवास से भटके प्राणी उपयुक्त आवास की कमी से प्रायः हो नष्ट हो जाते हैं। वर्ष 1994 की वर्षा ऋतु में झाडोल बाँध से कई मगर बह गये। बाद में एक मगर रास्ता भूल कर कई किलोमीटर खेतों से चलता हुआ ब्राह्मणों का खेखाड़ा नामक गाँव में घुस गया। ग्रामीणों के सहयोग से पकड़ कर वन विभाग द्वारा उसे

उदयपुर चिड़ियाघर पहुँचाया गया। दक्षिणी राजस्थान में जुलाई से अक्टूबर तक ऐसी घटनायें कई जगह हो जाती हैं। 1994 की बाढ़ में एक पेंगोलिन बहकर आ गया जिसे उदयपुर चिड़ियाघर पहुँचाया गया।

लोगों को जागरूक एवं शिक्षित करके सरीसृपों के पुनर्वास का प्रयास किया जाना चाहिये। भटके प्राणियों को चिड़ियाघर में न ले जाकर उनके मूल आवासों में ही छोड़ना चाहिये।

3. सड़क दुर्घटनायें

सड़कों को पार करते हुये अनेकों सरीसृप रात व दिन में वाहनों से कुचले जाते हैं। सरीसृप शीत रक्त वाले प्राणी होने के कारण काले रंग की सड़कों द्वारा शोषित उष्णता को लेने प्राय: सड़क पर आ जाते हैं तथा कुचल कर मारे जाते हैं (शर्मा[17,20])। सरीसृपों की सड़क दुर्घटनाओं को बिल्कुल रोक देना सम्भव नहीं है। विशेषकर साँपों को बचाना ज्यादा कठिन है। लम्बा शरीर होने के कारण वाहन का कोई न कोई पहिया साँप को चपेट में ले लेता है। अन्य सरीसृपों का आकार छोटा होने के कारण दोनों तरफ के टायरों के बीच के स्थान में प्राणी को ला कर बचाया जा सकता है। सड़कों के समान्तर दोनों तरफ 'नाली' बना कर सरीसृपों को मुख्य सड़क पर जाने से रोक सकते हैं। ये नालियाँ वर्षा में पानी के निकास का काम भी करती हैं। हालाँकि ऐसा सब जगह सम्भव नहीं है परन्तु अभयारण्य क्षेत्रों में सड़कों के गुजरने पर ऐसा किया जा सकता है। वाहन चालकों को वन्य प्राणियों पर दया दिखानी चाहिये।

4. सही डिजाइनों के पुलिया न होना

कई जगह नदी-नालों पर सड़कें रपट के रूप में बना दी जाती हैं जिससे पानी सड़क के ऊपर से बहता है। जलीय साँप व अन्य प्राणी कई बार रपट पर वाहन के पहियों नीचे कुचले जाते हैं। पानी का निकास सड़क के नीचे से ही किये जाने की व्यवस्था करने से इस तरह की दुर्घटनाओं को रोकना सम्भव है।

5. आवास-विनाश

आवास-विनाश की समस्या सर्वत्र है। विशेष कर इन्दिरा गाँधी नहर आ जाने से राजस्थान के रेगिस्तान का स्वरूप तेजी से बदलता जा रहा है। भूमि में सिंचाई हो रही है। ट्रैक्टरों से हल चलाये जाने लगे हैं तथा तरह-तरह की कृषि एवं वानिकी फसलें लगाई जाने लगी हैं। इस सबसे प्राकृतिक आवास में बदलाव आ रहा है। निश्चय ही मरु क्षेत्र को सिंचित क्षेत्र में बदलने से अनेकों प्रजातियों का समूल नाश सुनिश्चित है। नहर के पानी में बहकर आये पौधों के बीजों, मछलियों व मेढकों के अण्डे तथा प्राणियों से उत्तरी एवं पश्चिमी राजस्थान में उत्तर भारत की कई नई प्रजातियाँ प्रवेश करेंगी। बढ़ती मानव आबादी की निरन्तर बढ़ती आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर नहर विकास कार्यक्रम रोका जाना सम्भव नहीं है। जिन क्षेत्रों में नहर का पानी नहीं पहुँच सकता हो कम सेकम उन

क्षेत्रों को तो यथास्थिति में रखा जाना चाहिये। इतना जरूर ध्यान रखा जाना चाहिये कि ऐसे स्थान बहुत छोटे नहीं हों तथा एक जगह न होकर जगह-जगह फैले हुए हों। मरु राष्ट्रीय उद्यान, जैसलमेर इस दिशा में एक सार्थक प्रयास है।

6. पर्यटन

जैसलमेर में ऊँटों पर सवार होकर विदेशी पर्यटक टीलों पर ऊँट की सवारी का आनन्द लेते हैं। टीलों पर टोड हैड एगमा, सेण्डफिश आदि प्राणियों के आवास आहत होते हैं। पर्यटन प्रवृत्तियों को सभी जगह न फैला कर खास-खास जगहों पर ही सीमित रखना उचित रहेगा।

7. प्रदूषण

राजस्थान की नदियों एवं झीलों में प्रदूषण की समस्या निरन्तर बढ़ती जा रही है। प्रदूषण का प्रभाव सबसे पहले मछलियों एवं उभयचारियों पर प्रकट होता है। ये प्राणी कई तरह के सरीसृपों का भोजन बनते हैं। यदि प्रदूषण का क्रम जारी रहा तो इसके और घातक परिणाम सामने आयेंगे। जनता जागरूक होकर अपने जल स्रोतों की सुरक्षा करे तभी कुछ समाधान सम्भव है। दक्षिणी राजस्थान में आदिवासी जातियाँ अनेकों कम घातक वानस्पतिक विषों का उपयोग कर प्राचीन समय में मछलियाँ मारती थीं लेकिन आजकल कई जगह एल्ड्रीन जैसे विषों को नदियों के जल में डाल कर मछली मारने का सिलसिला प्रारम्भ हुआ है। निश्चिय ही यह बहुत खतरनाक है।

8. मछली पकड़ना

न केवल कानूनी ठेकों से बल्कि गैर-कानूनी ढंग से भी जगह-जगह मछलियाँ पकड़ने का सिलसिला जारी है। छोटे आकार के जाल से बहुत छोटे आकार की मछलियाँ तक पकड़ लीं जाती हैं। मछलियो की कमी से मगर, घड़ियाल, कछुये एवं अन्य जलीय पक्षियों को भोजन की समस्या का सामना करना पड़ता है।

9. पैरापेट दीवारों का न होना

प्राय: कुओं, हौदों, नहरों आदि पर पैरापेट दीवार नहीं होती, जिससे अनेकों सरीसृप अन्दर गिरकर डूबने से, भूख से या चोट से मारे जाते हैं। पैरापेट दीवार बना कर ऐसी दुर्घटनाओं को रोका जा सकता है। अच्छा तो यह रहे कि हौदों की कम से कम एक दीवार 30° या कम से ढाल की बनाई जावे ताकि दुर्घटनावश गिरा प्राणी ढालदार सतह से बाहर निकल सके (शर्मा[22])।

10. शिकार

अनेकों सरीसृप लोक-दवाओं में काम आते हैं। कछुये, सैण्डफिश, गार्डन लिजार्ड आदि को अनेक लोक-दवाओं हेतु मार दिया जाता हैं। गोह को चर्बी एवं मांस के लिये मारा जाता है। वर्षा में नम

जमीन के कारण इस प्राणी का बिल खोदना आसान हो जाता है। प्रायः उस समय शिकार किया जाता है। कुछ वर्षों पूर्व तक गोह के चमड़े का अवैध व्यापार भी होता था।

11. भय तथा भ्रम

छिपकलियाँ, गोह, कैमिलियोन आदि को कई जगह पर विषैला मान कर मार दिया जाता है जबकि इस पत्र में दर्ज सभी सरीसृप विषहीन हैं। गोह के बच्चे को उदयपुर संभाग में चन्दन गोह के रूप में अलग प्रजाति के रूप में लोग पहचानते हैं। लोगों का विश्वास है कि इस पर आसमान की बिजली गिरती है। यह अन्धविश्वास है। कैमिलियोन के बारे में लोगों को भ्रम है कि यह जिस व्यक्ति छू लेता है उसे कोढ़ हो जाता है। यह भी निराधार है। कैमिलियोन को कोई भी पकड़ सकता है।

12. सरीसृप-पालन

दक्षिण राजस्थान के शहरों एवं कस्बों में अनेक लोग भूमि कछुआ को घरों पर पालते हैं। कई बार एक ही व्यक्ति कई-कई कछुये रखता है। सब कछुये जंगल से लिये जाते हैं। इस प्रवृत्ति पर अंकुश जरूरी है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री रजा तहसीन, श्री यू० एम० सहाय, श्री ए० एस० चम्पावत, श्री राहुल भटनागर, श्री डी० एन० पाण्डे का बहुत आभारी है जिन्होंने प्रस्तुत अध्ययन को पूरा करने में अपना अमूल्य सहयोग प्रदान किया।

निर्देश

1. औफनबर्ग, डब्ल्यू०, J. B. N. H. S. 1981, 78(3), 487-93.
2. औफनबर्ग, डब्ल्यू०, रहमान, एच०, इफ्तार, एफ० तथा परवीन, जेड०, J. B. N. H. S. 1990, 87(1), 26-36.
3. भूपति, एस० तथा कुमार, सी० आर० ए०, J. B. N. H. S. 1988, 85(3), 624.
4. भूपति, एस० तथा विजयन, वी० एस०, J. B. N. H. S. 1991, 88(1), 118-22.
5. डैनियल, जे० सी०, The Book of Indial Reptiles, 1983.
6. फ्रेजियर, जे०, Hornbill, 1989, (2), 3-6.
7. जोर्ज, जे० एम०, J. B. N. H. S. 1986, 83(3), 670-71.
8. जोर्ज, जे० एम०, J. B. N. H. S. 1988, 85(2), 436-37.
9. खान, एम० एस०, J. B. N. H. S. 1985, 82(1), 144-48.

10. मैक, कैन, सी०, J. B. N. H. S. 1946, 43, 641-47.

11. मॉल, ई• ओ०, J. B. N. H. S., 1947, 84(1), 7-25.

12. मॉल, ई० ओ०, J. B. N. H. S., 1986, 83(3), 538-52.

13. राव, आर० जे० तथा चौधरी, बी० एस०, J. B. N. H. S., 1992, 89(3), 312-15.

14. राव, आर• जे• तथा सिंह, एल० ए० के०, J. B. N. H. S., 1937, 84(1), 55-65.

15. शर्मा, आर• के•, J. B. N. H. S., 1985, 82(1), 215-18.

16. शर्मा, एस• के•, J. B. N. H. S , 1988, 85(2), 437.

17. शर्मा, एस० के०, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1988, 31(1), 43-53.

18. शर्मा, एस० के०, J. B. N. H. S., 1990, 87(2), 308.

19. शर्मा, एस० के०, J. B. N. H. S., 1991, 88(3), 459.

20. शर्मा, एस० के०, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1992, 35(1), 47-60.

21. शर्मा, एस० के०, J. B. N. H. S., 1993, 90(3), 519.

22. शर्मा, एस० के•, Indial Forester, 1993, 119(10), 849-52.

23. शर्मा, एस० के•, J. B. N. H. S., 1994, 91(1), 150.

24. शर्मा, एस• के०, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1994, 37(4), 209-20.

25. स्मिथ, एम• ए•, The Fauna of British India, Vol. III, 1943.

26. सोमन, पी० डब्ल्यू०, J. B. N. H. S., 1991, 89(3), 382.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

फोरियर श्रेणी की (H, 1) (C, 1) तथा (C, 1) संकलनीयता

नीरजा सचान तथा एम० पी० सचान
गणित विभाग, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवां-486001 (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 27, 1995]

साराश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने ईज़ुमी के प्रमेय A तथा राव के प्रमेय B का व्यापकीकरण करते हुए एकल प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दो प्रमेय स्थापित किये हैं।

Abstract

(H, 1), (C, 1) and (C, 1) summability of Fourier series. *By* Km. Neeraja Sachan and M. P. Sachan, Department of Mathematicis, Government Model Science College, Rewa (M. P.).

Generalising Theorem A of Izumi and Theorem B of Rao, the authors, in the present paper, have established a pair of theorems under a single condition.

1. परिभाषायें तथा संकेतन

परिभाषा 1. माना कि अनन्त श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ के n वें क्रम का आंशिक योग S_n है। यदि

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{n} \to S, \text{ जब } n \to \infty, \tag{1.1}$$

तो श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ निश्चित संख्या S के लिये संकलनीय $(C, 1)$ कहलाती है।

परिभाषा 2. यदि

$$(HC)_n^1 = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)} \sigma_k \to S, \tag{1.2}$$

जब $n \to \infty$, जहाँ σ_n श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ के आंशिक योगों S_n के अनुक्रम $\{S_n\}$ का $(C, 1)$ माध्य निरूपित करता है,

तो हम कहते हैं कि श्रेणी $\sum_0^\infty u_u$, S के लिये $(H, 1)$ $(C, 1)$ माध्य द्वारा संकलनीय है अथवा सामान्यतः संकलनीय $(H, 1)$ $(C, 1)$ है।

माना कि $f(x)$ एक वास्तविक फलन है जो अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय (L) तथा आवर्त (2π) के साथ आवर्तनीय है। माना कि $f(x)$ से सम्बद्ध फोरियर श्रेणी निम्नवत् है :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_u \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_0^\infty A_n(x). \tag{1.3}$$

स्थिर वास्तविक संख्याओं x तथा S के लिये हम निम्नलिखित संकेतनों का उपयोग करेंगे :

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(u)\, du$$

2. प्रस्तावना

फेयर[1] द्वारा ज्ञात किया जा चुका है कि अंकगणितीय माध्य द्वारा संकलन की विधि अर्थात् $(C, 1)$ संकलनीयता फोरियर श्रेणी के लिये विशेष रूप में भलीभाँति उपयोगी है। संकलन की हारमोनिक अर्थात् $(H, 1)$ विधि का सम्प्रयोग जुर्रिजियस तथा हिल्ले एवं तमारकिन[2] द्वारा वर्णित हो चुका है।

ईजुमी[3] ने फोरियर श्रेणी की $(C, 1)$ संकलनीयता से सम्बन्धित निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया था :

प्रमेय A : यदि

$$\int_0^t \phi(u)\, du = 0(t), \text{ जब } t \to 0, \tag{2.1}$$

तथा

$$\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\phi(t+\frac{\pi}{n}-\phi(t)|}{t^2}\, dt = O(n), \tag{2.2}$$

तो फोरियर श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} A_n(x)$ योग S के लिये $(C, 1)$ संकलनीय होती है।

शर्मा तथा राव[4] ने फोरियर श्रेणी की $(H, 1)$ $(C, 1)$ संकलनीयता का अध्ययन किया तथा सिद्ध किया कि

प्रमेय B : यदि

$$\int_0^t \phi(u)\, du = O(t^{\Delta}),\ (\Delta \geqslant 1) \tag{2.3}$$

तथा

$$\int_{(K\pi/n)^{1/\Delta}}^{\eta} \frac{\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\phi(t)\right|}{t^2} \log \frac{1}{t}\, dt = 0(n \log n), \tag{2.4}$$

तो फोरियर श्रेणी सभी $\Delta \geqslant 1$ के लिये बिन्दु $t=\pi/n$ पर योग शून्य हेतु संकलनीय $(H, 1)$ $(C, 1)$ होती है, जहाँ पर K अनन्त की ओर शनैः शनैः अग्रसर होने वाला धनात्मक पूर्णांक है।

प्रमेय B की स्थिति $\Delta=1$ राय[5] द्वारा प्रणीत है।

प्रस्तुत अनुसन्धान का उद्देश्य यह दर्शाना है कि $\Delta > 1$ के लिये एकल प्रतिबन्ध (2.3) फोरियर श्रेणी की $(H, 1)$ $(C, 1)$ संकलनीयता सुनिश्चित करने हेतु पर्याप्त है। इस दृष्टि से हम यह सिद्ध करते हुए प्रमेय B का व्यापकीकरण करते हैं :

प्रमेय 1. यदि $\Delta > 1$ के लिये

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(u)\, du = 0(t^{\Delta}),\ \text{जब} t \to 0, \tag{2.5}$$

तो फोरियर श्रेणी (1.3) योग S के लिये संकलनीय $(H, 1)$ $(C, 1)$ होती है।

यहाँ पर उद्देश्य यह देखना भी है कि एकल प्रतिबन्ध (2.5) फोरियर श्रेणी की $(C, 1)$ संकलनीयता भी सुनिश्चित करता है और इस प्रकार प्रत्येक प्रमेय A तथा B एवं अपने स्वयं के प्रमेय 1 को व्यापक करना भी हमारा उद्देश्य है। इस ध्येय के साथ हम सिद्ध करते हैं :

प्रमेय 2. यदि प्रतिबन्ध (2,5) सन्तुष्ट होता है, तो फोरियर श्रेणी (1.3) योग S के लिये संकलनीय $(C, 1)$ होती है।

3. **प्रमेयिकाएँ** : हमें आगे निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका 1. [6] n और t के सभी मूल्यों के लिये,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} = O(1)$$

प्रमेयिका 2. [7] $0 \leqslant t \leqslant \pi$ के लिये,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kt}{k} = O(\log 1/t)$$

प्रमेयिका 3. लघु $t>0$ के लिये,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{(n-k+1)} = O(\log 1/t), \text{ जब } n \to \infty.$$

उपपत्ति : लघु $t>0$ के लिये,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{(n-k+1)}\right| = \left|\sum_{r=n}^{1} \frac{\sin (n+1-r)\, t}{r}\right|$$

$$= \left|\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} [\sin(n+1)t \cos rt - \cos(n+1)t \sin rt\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{r=1}^{n} \frac{\cos rt}{r}\right| + \left|\sum_{r=1}^{n} \frac{\sin rt}{r}\right|$$

$$= O(\log 1/t) + O(1)$$

$$= O(\log 1/t), \text{ जब } n \to \infty,$$

क्रमशः प्रमेयिका 2 तथा 1 के सम्प्रयोग से।

4. प्रमेय 1 की उपपत्ति

फोरियर श्रेणी (1.3) के आंशिक योग S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n इस प्रकार प्राप्त होता है :

$$\sigma_n - S + 0(1) = \frac{3}{n\pi} \int_0^\pi \phi(t) \; \frac{\sin^2 nt/2}{t^2} dt$$

टिशमार्श[8] के अनुसार हम एक ऐसे लघु $\delta > 0$ का चयन करते हैं कि $t \leqslant \delta$ के लिये प्रतिबन्ध (2.5) सन्तुष्ट होता है। तब हम लिखते हैं :

$$\sigma_n - S + 0(1) = \frac{2}{n\pi} \left[\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right] \phi(t) \; \frac{\sin^2 nt/2}{t^2} \; dt$$

$$= \frac{2}{\pi} [P+Q], \text{ माना।} \tag{4.1}$$

स्थिर $\delta > 0$ के लिये हम पाते हैं :

$$|Q| = \left| \frac{1}{n} \int_\delta^\pi \phi(t) \; \frac{\sin^2 nt/2}{t^2} \; dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n\delta^2} \int_\delta^\pi |\phi(t)| \; dt$$

$$= \frac{1}{n\delta^2} O(1) = 0(1), \quad \text{जब} \quad n \to \infty, \tag{4.2}$$

समाकलन $\int |\phi(t)| \; dt$ के सातत्य अंश से।

खण्डशः समाकलन तथा प्रतिबन्ध (2.5) से हम प्राप्त करते हैं :

$$P = \frac{1}{n} \int_0^\delta \phi(t) \frac{\sin^2 nt/2}{t^2} \; dt$$

$$= \frac{1}{n} \left[\Phi(t) \; \frac{\sin^2 nt/2}{t^2} \right]_0^\delta - \frac{1}{n} \int_0^\delta \Phi(t) \; \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2 2t/2}{t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{n} \left[0(t)^\Delta \; O\left(\frac{n}{t}\right) \right]_0^\delta - \frac{1}{n} \int_0^\delta \Phi(t) \; \left[\frac{n \sin nt}{2t^2} - \frac{2 \sin^2 nt/2}{t^3} \right] dt$$

$$= 0(1) + \frac{2}{n} \int_0^\delta \Phi(t) \; \frac{\sin^2 nt/2}{t^3} \; dt - \frac{1}{2} \int_0^\delta \Phi(t) \; \frac{\sin nt}{t^2} \; dt$$

$$= 0(1) + P_1 - P_2, \text{ माना, क्योंकि } \Delta > 1, \tag{4.3}$$

जहाँ

$$|P_1[\leqslant \frac{1}{n} \int_0^\delta \left| \Phi(t) \; \frac{\sin^2 nt/2}{t^3} \right| dt$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{0(t^\Delta)\ O(nt)}{t^3}dt,$$ प्रतिबन्ध (2.5) से

$$=0\left[\int_0^\delta t^{\Delta-2}\,dt\ \right]=0\left[\frac{t^{\Delta-1}}{\Delta-1}\right]_9^\delta$$

$$=0(1)$$ क्योंकि $\Delta>1$. (4.4)

अनुच्छेद (4.1), (4.2), (4.3) तथा (4.4) के प्रभाव से परिणाम निकलता है कि

$$\sigma_n-S=0(1)-\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \Phi(t)\frac{\sin nt}{t^2}\ dt$$

फलत: σ_n के $(H, 1)$ $(C, 1)$ रूपान्तर को $(H\ C)^1{}_n$ द्वारा निरूपित करते हुए हम परिभाषा तथा हार-मोनिक संकलन से पाते हैं—

$$(H\ C)^1_n\ -S=0(1)-\frac{1}{\pi\log n}\ \sum_{k-1}^{n}\ \frac{1}{(n-k+1)}\int_0^\delta \frac{\Phi(t)}{t^2}\sin kt\ dt$$

$$=0(1)-\frac{1}{\pi\log n}\ \sum_{k-1}^{n}\ \frac{1}{(n-k+1)}\left|\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^\delta\right|$$

$$\frac{\Phi(t)}{t}\sin kt\ dt$$

$$=0(1)-\frac{1}{\pi\log n}\sum_{k-1}^{u}\frac{1}{(n-k+1)}\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^\delta\right]$$

$$\frac{\Phi(t)}{t^2}\sin kt\ dt$$

$$=0(1)-\frac{1}{\pi}\,[y_1-y_2],$$ माना। (4.5)

प्रतिबन्ध (2.5) का सम्प्रयोग करते हुए हमें मिलता है—

$$|y_1|\leqslant\frac{1}{\log n}\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{(n-k+1)}\int_0^{1/n}\frac{0(t^\Delta)\ O(kt)}{t^2}dt$$

$$=0\left(\frac{n}{\log n}\right)\sum_{k-1}^{u}\frac{1}{(n-k+1)}\int_0^{1/n}t^{\Delta-1}\ dt$$

$$=0\left(\frac{n}{\log n}\right)\left[\frac{t^{\Delta}}{\Delta}\right]_0^{1/n} \sum_{k=1}^{u} \frac{1}{(n-k+1)}$$

$$=0\left(\frac{n}{n^{\Delta}\,\Delta\,\log n}\right)(\log n)=0\left(\frac{1}{\Delta\, n^{\Delta-1}}\right)$$

$$=0(1). \text{ जब } n\to\infty, \text{ क्योंकि } \Delta>1 \tag{4.6}$$

पुनः प्रमेयिका 3 तथा परिकल्पना (2.5) से हम प्राप्त करते हैं—

$$|y_3|\leqslant\frac{1}{\log n}\int_{1/u}^{\delta} \frac{|\Phi(t)|}{t^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{(n-k+1)}\right| dt$$

$$=\frac{1}{\log n}\int_{1/n}^{\delta} \frac{0(t^{\Delta})}{t^2}\, O(\log 1/t)\; dt$$

$$=0\left(\frac{1}{\log n}\right) O(\log n)\int_{1/n}^{\delta} t^{\Delta-2}\, dt$$

$$=0(1)\; \left[\frac{t^{\Delta-1}}{\Delta-1}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$=0(1), \text{ जब } n\to\infty, \text{ क्योंकि } \Delta>1. \tag{4.7}$$

अन्ततः (4.5), (4.6) तथा (4.7) के परिणामों से उत्पत्ति होती है :

$$(HC)_u^1 - S=0(1), \text{ जब } n\to\infty.$$

इस प्रकार प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

फोरियर श्रेणी (1.3) के आंशिक योग S_n में $(C, 1)$ रूपान्तर को σ_n द्वारा निरूपित करते, परिकल्पना (2.5) का सम्प्रयोग करते तथा प्रमेय 1 की उपपत्ति की भाँति व्याख्या करते हुए हमें प्राप्त होता है :

$$\sigma_n-S=0(1)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \Phi(t)\; \frac{\sin nt}{t^2}\, dt,$$

जहाँ $\delta>0$ को इतना छोटा चयन किया गया है कि $t\leqslant\delta$ हेतु प्रतिबन्ध (2.5) सन्तुष्ट होता है । परिणामतः हमें मात्र यह सिद्ध करना है कि

$$Z=\int_0^{\delta} \Phi(t)\ \frac{\sin nt}{t^2}\ dt=0(1),\ \text{जब}\ a\to\infty. \tag{51}$$

प्रतिबन्ध (2.5) के सम्प्रयोग से,

$$|Z|=\leqslant \int_0^{\delta} \frac{|\Phi(t)\sin nt|}{t^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\delta} \frac{0(t^{\Delta})\ O(1)}{t^2}\,dt=0\left[\int_0^{\delta} t^{\Delta-2}\,dt\right]$$

$$=0\left[\frac{\delta^{\Delta-1}}{(\Delta-1)}\right]=0(1),\ \text{क्योंकि}\ \Delta>1. \tag{5.2}$$

इस प्रकार प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डा० आर० बी० मिश्रा, प्राध्यापक एवं अध्यक्ष, गणित विभाग, अवधेश प्रताप सिंह विश्वविद्यालय, रीवाँ ने जो प्रोत्साहन तथा महत्वपूर्ण सुझाव दिये, उसके लिये लेखकद्वय उनका आभार प्रकट करते हैं।

निर्देश

1. फेयर, एल०, **मैथ० ऐनालेन**, 1904, , 51-69

2. हिल्ले, ई० तथा तमारकिन, जे० डी०, **ट्रांजै० अमेरि० मैथ० सोसा०**, 1932, **34**, 757-783.

3. ईजुमी, एल०, **टोहोकू मैथ० जर०**, 1949, 144-166.

4. शर्मा, पी० एल० तथा राव, वी० वेनूगोपाल, **ऐनाली डि मैटमेटिका प्यूरा एड अप्लीकेटा** (IV), 1966, **LXXIV**, 203-226.

5. राय, ओ० पी०, **पी-एच० डी० शोध-प्रबन्ध**, यूनीवर्सिटी आफ सागर, सागर, 1966.

6. एवं 8. टिशमार्श, ई० सी०, **दी थ्योरी आफ फंक्शन्स**, आक्सफोर्ड, 1961, **42-43**, 414 तथा 415-416.

7. हार्डी, जी० एच० तथा रोगोसिन्स्की, डब्ल्यू०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिलो० सोसा०**, 1947, 43.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

आयोडीन वाष्प में जोशी प्रभाव पर अन्तराकाशी आवेश का प्रभाव

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त—जनवरी 1, 1995]

सारांश

आयोडीन वाष्प में विसर्जन के अस्वपोषी क्षेत्र में धनात्मक जोशी प्रभाव $+\Delta i$ का प्रेक्षण हुआ जो देहली विभव V_m से ऊपर विभव बढ़ते ही एकदम $-\Delta i$ में व्युत्क्रमित हो गया। काल प्रभावन ने V_m तथा $+\Delta i$ को घटाया और $-\Delta i$ को बढ़ाया। इसका कारण विसर्जन के दौरान आयनों की बौछार से इलेक्ट्रोड-कार्य-फलन में हुई कमी है। काल प्रभावन से $-\Delta i$ में हुई वृद्धि का कारण है इलेक्ट्रोड-कार्य-फलन में हुई कमी के फलस्वरूप प्रकाश-इलेक्ट्रॉन-उत्सर्जन में हुई वृद्धि। ओजोनित्र को तनिक गर्म करने से नली कालप्रभावन के पूर्व की अवस्था में लौट आयी। जोशी-तल के क्षीणन ने $-\Delta i$ को उल्लेखनीय घटा दिया और V_m को प्रर्याप्त बढ़ा दिया।

Abstract

Role of ionic space charge on Joshi effect in iodine vapour. *By* Jagdish Prasad Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

In the non-self-maintained region of the discharge in iodine vapour, positive Joshi effect, $+\Delta i$ was observed which inverted precipitously to $-\Delta i$ as the applied potential was increased above the threshold potential, V_m. Ageing decreased V_m and $+\Delta i$ and increased $-\Delta i$. This is ascribed to a lowering of the electrode work function due to ionic bombardment under discharge. The increase in $-\Delta i$ with ageing is due to an enhanced photo-electron emission caused by the decrease in the electrode work function. Warming the ozonizer restored the tube to the pre-agieng condition. The attenuation of the Joshi layer markedly decreased $-\Delta i$ and appreciably increased V_m.

ामविसर्जन अभिक्रियाओं केलिये स ान्यतया तथा Δi के लिये विशेषतया, V_m के महत्व को जोशी ने जोर देकर कहा है[1–3]। उनके अनुसार, नली-धारा $V-V_m$ अन्तर पर निर्भर होती है, जबकि V अनुप्रयुक्त विभव है। अतः विसर्जन काल के अनुसार V_m तथा परिणामतः $\pm\Delta i$ में हुये परिवर्तन का अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

सीमेन्ज प्रकार के सिग्काल S75 के कांच के ओजोनित्र के वलयाकार स्थान में विसर्जन उत्पन्न किया गया। एक क्रिस्टल दिण्टकारी 1 N 34 (सिल्वेनिया) को संसूचक के रूप में प्रयोग किया गया।

पुनरूर्ध्वपातित आयोडीन युक्त बल्ब से टॉप्लर पम्प द्वारा निर्वातित ओजोनित्र के वलयाकार स्थान में 30°C पर आयोडीन-वाष्प प्रविष्ट की गयी।

परिणाम तथा विवेचना

0.37 kV पर एक घन्टे के काल-प्रभावन से V_m, 350 वोल्ट से घटकर 300 वोल्ट हो गया। V_m पर काल-प्रभावन का यह प्रभाव बिराम-काल के साथ आंशिक रूप में उत्क्रमणीय था। V_m में हुये परिवर्तन की व्याख्या, विसर्जन के दौरान आयनीय बौछार[5,6] के कारण उत्पन्न इलेक्ट्रोड-कार्य-फलन में हुये ह्रास के आधार पर की जा सकती है। द्वितीयतः काँच के इलेक्ट्रोड पर अवशिष्ट रहे पूर्व विसर्जन के आवेशित कण (विशेषतः इलेक्ट्रॉन) कम विभवों[7] पर ही आगामी विसर्जनों को आरम्भ कर सकते हैं। V_m में प्रेक्षित ह्रास जोशी[3] के उस प्रस्ताव के अनुकूल प्रतीत होता है जिसमें कहा गया है कि काल प्रभावन के दौरान निर्मित अधिशोषित तल कम कार्य फलन का होता है। ह्युजिज एवं ड्रुब्रिज[8] का सामान्य अवलोकन, जो भी जोशी के इस प्रस्ताव से मेल नहीं खाता है, शायद इसलिये कि विसर्जन से काँच के तल की दशा बदल जाती है, जो आगामी विसर्जनों को प्रभावित करती है[9]।

कक्ष 30°C पर सामान्य विरामकाल के द्वारा नली का काल प्रभावन पूर्व की अवस्थाओं में लौटने की गति बहुत धीमी पायी गयी। तो भी नली को 60-70°C तक गर्म करके जब 30°C पर ठंडा किया गया तब प्राप्त i-V अभिलक्षण काल प्रभावन से पूर्व के समान थे। इस विशिष्ट प्रेक्षण ने उद्घाटित कर दिया कि काल प्रभावन के कारण हुआ V_m का ह्रास, कम कार्य फलन के सीमान्त या जोशी-तल की निर्मिति के कारण है। ओजोनित्र के कोष्णन से इस तल के क्षीणन ने नली को काल प्रभावन पूर्व की अवस्थाओं में लौटा दिया।

V_m के नीचे अनुप्रयुक्त नली में बहुत अधिक $+\Delta i$ का प्रेक्षण हुआ जिसका V_m के ऊपर अनुप्रयुक्त विभव को बढ़ाने पर, एकदम $-\Delta i$ में में उत्क्रमण हो गया। काल प्रभावन के कारण $+\Delta i$ तब तक घटा और $-\Delta i$ पर्याप्त बढ़ा जब तक दोनों ने अपरिवर्ती मान प्राप्त नहीं कर लिया। जब ओजोनित्र को विराम-अवस्था में रखा गया तो $+\Delta i$ बढ़ गया और $-\Delta i$ का परिमाण घट गया। नियमित कालान्तराल पर लगातार काल प्रभावन के बाद, $\pm\Delta i$ के प्रेक्षित अधिकतम मान +500% तथा −70% थे। ओजोनित्र के कोष्णन के द्वारा जोशी-तल के क्षीणन के कारण ये +1800% तथा −10%

तक परिवर्तित हो गये। अधिशोषण-सदृश सीमान्त-तल की निर्मिति $+\Delta i$ के लिये प्राथमिक[3], है प्रस्तुत परिणामों से सिद्ध होता है कि लाक्षणिक क्रिया फलनयुक्त यह तल Δi का परिमाण ही नहीं बल्कि चिह्न भी निर्धारित करता है।

V_m से नीचे के विभव पर, प्राथमिक इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन कम होता है और परिणामत: पर्याप्त ऋण आयन अन्तराकाशी आवेश निर्मित नहीं होता है। अत: उत्सर्जित प्रकाश-इलेक्ट्रॉन अवेलांशों को को आरम्भ कर देते हैं जो धारा में जुड़ते जाते हैं। V_w पर गैस का डाइ-इलेक्ट्रिक के रूप में कार्य ढीला पड़ जाता है और अनुप्रयुक्त विभव के प्रभाव से विसर्जन के कारण उत्पन्न धनात्मक आयन विपरीत आवेशित इलेक्ट्रोडों की ओर गति करने लगते हैं। अर्ध चक्र के मुख्य भाग के दौरान (क्षणिक) ऐनोड पर पहुँचने वाले इलेक्ट्रॉनों का उदासीकरण हो जाता है किन्तु वे इलेक्ट्रान जो इलेक्ट्रोड के चिह्न बदलने के तनिक पहले पहुँचते हैं, वे काँच की दीवारों पर ऐसे-के-ऐसे ही निक्षेपित हो जाते है[10,11]। अर्ध चक्र के दौरान अपूर्ण उदासीनीकरण से इलेक्ट्रोड पर श्लथ बन्धनयुक्त इलेक्ट्रॉनों का एक अवशेष रह जाता है। आगामी अर्ध चक्र के दौरान ये इलेक्ट्रॉन इलेक्ट्रोड को, जो अब क्षणिक कैथोड है, उल्लेखनीय कार्यफलन तथा उच्च प्रकाश-वैद्युत सक्रियता प्रदान करते हैं। इस प्रकार प्रकाश में प्राथमिक उत्सर्जन पर्याप्त बढ़ जाता है। उत्तेजित गैस/वाष्प कणों के द्वारा इन इलेक्ट्रॉनों के संयोग से विस्तृत ऋणायन अन्तराकाशी आवेश निर्मित होता है। यह अन्तराकाशी आवेश मंदक अवरोध का कार्य करता है और विभव-वितरण बदल देता है। प्रकाश-इलेक्ट्रॉनों में से अनेक जो इस अन्तराकाशी अवरोध के पार चले जाते हैं वे नये अवेलांशों को प्रारम्भ करते हैं और इस प्रकार $+\Delta i$ को उत्पन्न करते हैं। इससे $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ के सह-अस्तित्व की व्याख्या सम्भव है।

धारा संरचना के ओसिलोग्राफीय अध्ययन से ज्ञात हुआ कि किरणन से एच० एफ० स्पन्दनों के परिमाप में कमी और साथ ही उनकी संख्या में वृद्धि होती है[7,12,13]। इनमें से पूर्व $-\Delta i$ तथा $+\Delta i$ का द्योतक है। गैल्वनोमीटर एक समाकलक साधन होने के कारण, इनका बीजगणित योग प्रदर्शित करता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० के० टिक्कू के अमूल्य सुझाओं के लिये लेखक आभारी है।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस०, प्रोसी० इण्डियन साइंस काग्रेस, फिजि० सेक०, 1943, ऐब्स्ट 26.

2. जोशी, एस० एस०, करेंट साइंस, 1945, **14**, 67.

5. जोशी, एस० एस०, वही, 1947, **16**, 19.

4. प्रसाद, चे०, बोल० सोस० क्विम०, 1985, **52**, 125, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1992, **35(4)**, 325.

5. विले, ई० बी०, "Collision of the Second Kind", एड्विन आर्नोल्ड, 1937.

6. लॉव, एल० बी०, "Foundamental Processes of Electrical Discharge through Gases", जोह्न विले, 1939.

7. ओलिफैंट, एम० एल० बी०, **प्रोसी० कैम्ब० फिला० सोसा०**, 1927 **24**, 451.

8. ह्युजिज, ए० एल० एवं ड्युब्रिज, एल० ए०, "Photoelectric Phenomena", मैकग्रॉ हिल, 1932.

9. गिल, इ० डब्ल्यु० बी० तथा फॉन एंजिल, ए०, **प्रोसी० रॉयल सोसा०**, 1943, **192A**, 117.

10. मोहन्ती, एस० आर०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1955, **23**, 1533.

11. मोहन्ती, एस० आर०, **जर्न० साइं० रिसर्च, बी० एच० यू०**, 1955-56, **6(1)**, 58.

12. प्रसाद, जे०, **ऐन० सोसा० किम० पोलोनो**, 1972, **46**, 1629.

13. प्रसाद, जे०, **बोल० सोसा० क्विम०**, 1986, **52**, 219.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

कतिपय प्रसार सूत्र तथा विशिष्ट दशाएँ

आर० के० तिवारी तथा आर० एन० शुक्ल
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद

[प्राप्त—दिसम्बर 1, 1995]

सारांश

एक नवीन सार्वीकृत श्रेणी वाले बहुपदों पर विचार करते हुए कल्पित संख्या में ऐसे बहुपदों के गुणनफल को इन बहुपदों के तथा जनक सम्बन्ध के रैखिक संयोग के रूप में व्युत्पन्न किया गया है।

Abstract

Certain expansion formulae and particular cases. *By* R. K. Tiwari and R. N. Shukla, Department of Mathematics and Statistics, Avadh University, Faizabad (U. P.).

Considering a new generalized class of polynomials, the product of an arbitrary number of such polynomials expressed as a linear combination of these polynomials and generating relation for the coefficients in the expansion formula is derived.

1. प्रस्तावना

माना कि

$$G(t)=\sum_{k=0}^{\infty} G_k\, t^{mk+1} \tag{1.1}$$

$$H(t)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k\, t^{mk} \qquad (h_0=1) \tag{1.2}$$

तथा

$$H(t) \exp [x\, G(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n \tag{1.3}$$

जहाँ m धनात्मक पूर्णाङ्क है। यह देख पाना आसान है कि

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{g_{n,\,k}}{k!\,(n-mk)!}\, x^{n-mk}. \tag{1.4}$$

यही नहीं, यदि हम मान लें कि

$$[H(t)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} h'_k\, t^{mk} \quad (h'_0 = 1)$$

तो (1.4) के विलोम को

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{g'_{n,\,k}\, n!}{k!} g_{n-mk}(x). \tag{1.5}$$

द्वारा अंकित किया जा सकता है। कार्लिट्ज[1] के शोधकार्य से तथा बहुपद $g_n(x)$ की विस्तृत सामान्यता से प्रेरित होकर हम बहुपद $g^i_n(a_i\, x)$, $i=1, 2, \ldots, p$ (माना), की कल्पित संख्या के गुणनफल के लिये विस्तार सूत्र व्युत्पन्न करेंगे जिनसे हर एक में (1.3) जैसा जनक-सम्बन्ध होता है। इस तरह से प्राप्त परिणामों से कार्लिट्ज द्वारा[1] तथा अन्यों[2] दिये गये संगत फलों का व्यापकीकरण प्राप्त होगा।

2. गुणांकों के लिए प्रसार सूत्र तथा जनक सम्बन्ध

निम्नलिखित गुणनफल पर विचार करें

$$\Omega = g^{(1)}_{n_1}(a_1 x)\, g^{(2)}_{n_2}(a_2 x) \ldots g^{(p)}_{n_p}(a_p x) \tag{2.1}$$

जहाँ

$g^{(i)}_{n_i}(a_i x)$ का जनन

$$H^{(i)}(t) \exp [x\, G^{(i)}(t)] = \sum_{n_i=0}^{\infty} g^{(p)}_{n_i}(a_i x)\, t^{n_i} \tag{2.2}$$

द्वारा होता है तथा $H^{(i)}(t)$ एवं $G^{(i)}(t)$ की घातांक श्रेणियाँ क्रमशः (1.2) एवं (1.1) के स्वरूप वाली होती हैं। यदि हम निम्नलिखित संकेतनों का उपयोग करें

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_p = N$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p = K \tag{2.3}$$

$$\left[\frac{n_i}{m}\right]=n_i^*\ ,\ i=1, 2,\ldots, p,\ \left[\frac{n}{m}\right]=n^*, \left[\frac{N}{m}\right]=N^*$$

तथा (1.4) एवं (1.5) को व्यवहृत करें तो हमें

$$\Omega=\sum_{k_1=0}^{n^*_j}\ldots\sum_{k_p=0}^{n^*_p}\left[\prod_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}_{n_j,k_j}\,a_j^{n_j-mk_j}}{k_j!\,(n_j-mk_j)!}\right].$$

$$.\sum_{s=0}^{N-K}\frac{(N-mK)!}{s!}\,g'_{N-mK,\ s}\,g_{N-mK-ms}(x),$$

प्राप्त होगा जो सर्वसमिका

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{r-k}\frac{A(r, s, k)}{s!}=\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{n}\frac{A(r, r-k-s, k)}{(r-k-s)!}, \tag{2.4}$$

का उपयोग करने पर निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\Omega=\sum_{s=0}^{N^*}D_s^{(n_1,\ldots,n_p)}\,g_{N-mN^*+ms}(x), \tag{2.5}$$

जहाँ गुणांकों $D_s^{(n_1,\ldots,n_p)}$ को

$$D_s^{(n,\ldots,n_p)}=\sum_{k_1=0}^{n_1^*}\sum_{k_p=0}^{n_p^*}\left[\prod_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}_{n_j,\,k_j}\,a_j^{n_j-mk_j}}{k_j!\,(n_j-mk_j)!}\right]. \tag{2.6}$$

$$.\frac{(N-mK)!}{(N^*-K-s)!}\,g'_{N-mK,\ N^*-K-s}\,.$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अब गुणांकों $D_s^{(n_1,\ldots,n_p)}$ के लिये जनक फलन व्युत्पन्न करने के लिये सर्वप्रथम हम मानते हैं

$$W=\sum_{n_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_p=0}^{\infty}D_s^{(n_1,\ldots,n_p)}\,u_1^{n_1}\ldots u_p^{n_p} \tag{2.7}$$

तथा देखते हैं कि (2.2) तथा (1.4) से

$$H^{(i)}(t)\,[G^{(i)}(t)]^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(i)}_{n+mk,\,k}}{k!}\,t^{n+mk},$$

प्राप्त होता है जिसके उपयोग से

$$W=\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_p=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{p}\frac{H^{(j)}(u_j)\,(a_j\,G^{(j)}(u_j))^{n_j}}{n_j!}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{N!}{(N^*-s)!}\,g'_{N,\,N^*-s}\;.$$

की प्राप्ति होती है। इस प्रकार

$$W=H^{(1)}(u_1)\,\ldots\,H^{(p)}(u_p)\sum_{n=ms}^{\infty}\frac{z^n}{(n^*-s)!}\,g'_{n,\,n^*-s}\;, \tag{2.8}$$

जहाँ संक्षेपण की दृष्टि से z सूचक है

$$a_1\,G^{(1)}(u_1)+\ldots+a_p\,G^{(p)}(u_p) \text{ का}$$

अब चूँकि

$$\sum_{n=ms}^{\infty}A(n,n^*)=\sum_{n=s}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}(Amn+j,\,n)$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}A(mn+ms+j,\,n+s),$$

अतः (2.8) निम्नवत् हो जाता है—

$$W=H^{(1)}(u_1)\,\ldots\,H^{(p)}(u_p)\sum_{j=0}^{m-1}z^{ms+j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{mn}}{n!}\,g'_{m(n+s)+j,\,n}\;. \tag{2.9}$$

अपरंच, (1.5) तथा (1.3) के अनुसार

$$\exp\,[x\,G(t)]=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{G^{n+mk}(t)\,g_n(x)}{k!}\,g'_{n+mk,\,k}\,,$$

$$= \frac{1}{H(t)} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n,$$

जिससे

$$\frac{t^n}{H(t)} = G^n(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g'_{n+mk,k}}{k!} G^{mk}(t). \tag{2.10}$$

यदि हम घातांक श्रेणी $I(t)$ के अस्तित्व की ऐसी कल्पना करें कि

$$G(I(t)) = I(G(t)) = t, \tag{2.11}$$

जिसके फलस्वरूप (2.10) से

$$\frac{(I(t))^{sm+j}}{H(I(t))} = t^{sm+j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g'_{sm+j+mk,\,k}}{k!} t^{mk}, \tag{2.12}$$

प्राप्त होता है। फलतः (2.9) के दक्षिण पक्ष को जोड़ने पर

$$\frac{H^{(1)}(u_1) \ldots H^{(p)}(u_p)}{H(I(z))} I^{sw}(z) \left\{ \frac{I^m(z)-1}{I(z)-1} \right\}. \tag{2.13}$$

प्राप्त होगा।

3. विशिष्ट दशाएँ

$m=1$, रखने पर हमें

$$g_{n_1}^{(1)}(a_1 x) \ldots g_{n_p}^{(p)} a_p x)$$

के लिये संगत प्रसार प्राप्त होगा जिससे $B_s^{(n_1, \ldots, n_p)}$ गुणांकों का जनन निम्नलिखित सम्बन्ध के द्वारा होता है—

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_p=0}^{\infty} B_s^{(n_1, \ldots, n_p)} u_1^{n_1} \ldots u_p^{n_p}$$

$$= \frac{H^{(1)}(u_1) \ldots H^{(p)}(u_p)}{H(I(z))} I^s(z). \tag{3.1}$$

(3.1), में $p=2$ रखें तो हमें कालिट्ज द्वारा व्युत्पन्न सूत्र प्राप्त होगा[1]।

दूसरी ओर, यदि

$$G(t)=\frac{t}{(1+yt^m)^r},\ H(t)=(1+yt^m)^{-c},$$

बहुपद $g_n(x)$ संगत होगा $\Gamma_n^c(x, y, r, m)$ के[1]। इस प्रसार सूत्र (2.5) तथा जनक फलन (2.13) सरल होकर निम्न रूप धारण कर लेंगे

$$\Gamma_{n_1}^{c_1}(a_1x, y_1, r_1, m) \ldots \Gamma_{n_p}^{c_p}(a_px, y_p, r_{p1}\ m)$$

$$= \sum_{s=0}^{N^*} C_s^{(n_1, \ldots, n_p)} \qquad \Gamma_{N-mN^*+ms}(x) \tag{3.2}$$

तथा

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_p=0}^{\infty} C_s^{(n_1, \ldots, n_p)} u_1^{n_1} \ldots u_p^{n_p} = (1+y_1 u_1^m)^{-c_1} \ldots (1+y_p u_p^m)^{-c_p}$$

$$z^{ms}\ v^{c+rms} \frac{z^m v^{rm}-1}{zv^r-1} \tag{3 3}$$

जहाँ $v=1+yz^m v^{rm}$ तथा

$$z=\frac{a_1 u_1}{(1+y_1 u_1^m)^{r_1}}+\ldots+\frac{a_p u_p}{(1+y_p u_p^m)^{r_p}},$$

जिसे इसके पूर्व इन लेखकों ने[2] प्राप्त किया है।

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल० Collect. Math. 1963, **15**, 245-258.
2. सविता कुमारी तथा सिंहल जे० पी०, Products of several generalized Laguerre polynomials (प्रेषित)
3. सिंहल, जे० पी० तथा सविता कुमारी, ज्ञानाभ (प्रो० आर्थर० एर्डेल्यी स्मृति अंक) 1980, 9-**10** (प्रकाशनाधीन)।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

संयुग्मी फूरियर श्रेणी की $[(E, q)(C, 1)]$ संकलनीयता

डी० पी० पटेल तथा एम० पी० सचान
गणित विभाग, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—दिसम्बर 4, 1994]

सारांश

इस प्रपत्र का उद्देश्य गुप्ता के प्रमेय B के परिणाम को $f(x)$ की संयुग्मी फूरियर श्रेणी तक संकलन की विधि के लिए विस्तृत करना है।

Abstract

$(E, q)(C, 1)$ summability of a conjugate Fourier series. *By* D. P. Patel and M. P. Sachan, Department of Mathematics, Government Model Science College, Rewa (M. P.)

The object of the paper is to extend the result of theorem B of Gupta to conjugate Fourier series of $f(x)$ for $[(E, q)(C, 1)]$ summation method.

1. **परिभाषाएँ तथा संकलन** :

परिभाषा : माना कि σ_n से एक अनन्त श्रेणी $\sum_0 u_n$ के आंशिक योगफल S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर घोषित होता है तो S_n का $[(E, q)(C, 1)]$ रूपान्तर σ_n के (E, q) रूपान्तर के रूप में परिभाषित होता है। इस प्रकार यदि

$$(E\,C)_n^q = (q+1)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} \sigma_k \to S, \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \tag{1.1}$$

तो श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ को S तक संकलनीय $(E, q)(C, 1)$ कहा जाता है जिसमें S एक सान्त संख्या है

माना कि $f(x)$ वास्तविक फलन है जो लेबेस्ग के अनुसार अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय है और 2π आवर्त के साथ आवर्ती है।

माना कि $f(x)$ से सम्बद्ध श्रेणी निम्नवत् है—

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)=\sum^{\infty} A_n(x). \tag{1.2}$$

फूरियर श्रेणी (1.2) की संयुग्मी श्रेणी, जो प्रायः $f(x)$ की संयुग्मी फूरियर श्रेणी के नाम से ज्ञात है, निम्नवत् है

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx-a_n \sin nx)=\sum_{1}^{\infty} B_n(x). \tag{1.3}$$

हम निम्नलिखित संकेतनों को प्रायः प्रयुक्त करेंगे—

$$\phi(t)=fx+t)+f(x-t)-2S$$

$$\phi_1(t)=\frac{1}{t}\,0(u)\,du$$

$$\Phi_1(t)=\int_0 |\phi_1(u)|\,du$$

$$\psi_0(t)=f(x+t)-f(x-t)$$

$$\psi_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \psi_0(u)\,du$$

$$\Psi_1(t)=\int_0^t |\psi_1(u)|du$$

$$P(q, t)=1+q^2+2q\cos t$$

$$Q(q, t)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{q+\cos t}\right)$$

2. प्रस्तावना

यूलर (E, q) संकलनीयता विधि का विस्तार से विवेचन हो चुका है।[1–4]

फूरियर श्रेणी की गुणनफल संकलनीयता की विवेचना भी की जा चुकी है।[6,7]

दीक्षित [8] ने अनुक्रम $\{nB_n(x)$ की संकलनीयता $[(C, 1)\,(N, p_n)]$ के लिए परिणाम प्राप्त किया।

शर्मा तथा राव[6] एवं गुप्ता[7] ने जिन परिणामों को सिद्ध किया है वे क्रमशः हैं—

प्रमेय A : यदि

$$\int_0^t \phi(u)\, du = o(t^{\Delta}),\ (\Delta \geqslant 1) \tag{2.1}$$

तथा

$$\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\eta} \frac{|\phi(t+\pi/n)-\phi(t)|}{t^2} \log (1/t)\, dt = o(n \log n) \tag{2.2}$$

तो फूरियर श्रेणी संकलनीय $(H, 1)\,(C, 1)$ है योगफल o तक विन्दु $t=\pi/n$ पर समस्त $\Delta \geqslant 1$ के लिए तथा K कोई धनात्मक पूर्णाङ्क है जो मन्द गति से अनन्त तक जाता है।

प्रमेय B : यदि

$$\Phi_1(t) = o\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to o, \tag{2.3}$$

तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी S तक संकलनीय $(B)\,(C, 1)$ है।

इस प्रपत्र का उद्देश्य प्रमेय B के परिणाम को $f(x)$ की संयुग्मी फूरियर श्रेणी तक संकलन की $[(E, q)\,(C, 1)]$ विधि के लिए बढ़ाना है। हम सिद्ध करेंगे कि

प्रमेय : यदि

$$\Psi_1(t) = o\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to o, \tag{2.4}$$

तो (1.3) की संयुग्मी फूरियर श्रेणी संकलनीय $[(E, q)\,(C, 1)]$ है संकलन

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{1/n}^{\pi} \psi_0(t) \cos \frac{t}{2}\, dt,$$

के मान तक बशर्ते कि कौशी के अनुसार समाकलन का अस्तित्व हो।

3. **प्रमेयिकाएँ** : प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

(a) $\sum_{k=1}^{n} \sin kt = \dfrac{\cos t/2-\cos (n+1/2)t}{2 \sin (t/2)}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \dfrac{\sin (n+1/2)t-\sin t/2}{2 \sin (t/2)}$

उपपत्ति : हम जानते हैं

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos kt+i \sin kt)= \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$$

$$=\frac{e^{it}(1-e^{int})}{1-e^{it}}=\frac{e^{it/2}(1-e^{int})}{(e^{-it/2}-e^{it/2})}$$

$$=\frac{e^{it/2}-e^{i(n+1/2)t}}{-2 \sin t/2}=\frac{i[e^{it/2}-e^{i(n+1/2)t}]}{2 \sin t/2}$$

प्रमेयिका 1 के परिणाम (*a*) तथा (*b*) की प्राप्ति काल्पनिक तथा असली खण्डों को समान करने पर होती है।

प्रमेयिका 2

यदि $\psi_0(t)=0(1)$, ज्यों-ज्यों $t \to o$, तो

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} \psi_0(t) \cot t/2 \, dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n} \frac{\psi_0(t)}{t} \, dt+o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty,$$

उपपत्ति (cot $t/2$) को t के धनात्मक घातों में विस्तार करने पर पुष्टि की जा सकती है कि

$$(\cot t/2-2/t)=0\,(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t\to o,$$

जिससे हमें निम्न की प्राप्ति होती है—

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} \psi_0(t)\,(\cot t/2-2/t)\, dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} 0(1)\, 0(t)\, dt$$

$$=0\left[\int_0^{1/n} t\, dt\right]=0\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty.$$

जिससे प्रमेयिका 2 तुरन्त प्राप्त हो जाती है।

प्रमेयिका 3

$o<q<1$ तथा $o\leqslant t\leqslant\pi$ के लिए

$$\{P(q,t)\}^{n/2}/(q+1)^n=0\left[\exp\left(-\frac{nqt^2}{2\pi^2}\right)\right]$$

उपपत्ति : चूंकि $<q<1$ तथा

$\sin(t/2)\geqslant t/\pi$ क्योंकि $o\leqslant t\leqslant\pi$,

अत:

$$\frac{\{P(q,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}=\left[\frac{1+q^2+2q(1-2\sin^2 t/2}{(q+1)^2}\right]^{n/2}=\left[1-\frac{4q\sin^2 t/2}{(q+1)^2}\right]^{n/2}$$

$$\leqslant\left(1-\frac{qt^2}{\pi^2}\right)^{n/2}=\left\{\left(1-\frac{qt^2}{\pi^2}\right)^n\right\}^{1/2}$$

$$=\left[1+\left(-\frac{nqt^2}{\pi^2}\right)+\frac{(1-1/n)}{2!}\left(-\frac{nqt^2}{\pi^2}\right)^2+\ldots\right]^{1/2}$$

$$=0\left[\{e^{-nqt^2/\pi^2}\}^{1/2}\right]=0\left[\exp\left(-\frac{nqt^2}{2\pi^2}\right)\right]$$

प्रमेयिका 4 : लघु $t>o$ के लिए

$$Q(q,t)=\frac{t}{q+1}+t^3B(t)$$

जहाँ $B(t)$ t के फलन का बद्ध घात है।

उपपत्ति : मैक्लारिन प्रमेय द्वारा विस्तार करने पर

$$Q(q,t)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{q+\cos t}\right)=\frac{t}{q+1}+\frac{q(1-q)}{(q+1)^3}\frac{t^3}{3!}+\ldots$$

$$=\frac{t}{q+1}+t^3B(t),$$

जहाँ $B(t)$ t का ऐसा घात फलन है कि $o<B(t)<1/3$.

प्रमेयिका 5 : $o<t<1/n$ के लिए

$$H(n,t)\equiv 1-\left(\frac{q+1}{nt}\right)\frac{\{P(q,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\sin\{nQ(q,t)\}=0\ (t)$$

उपपत्ति : $o<t<1/n$, के लिए प्रमेयिका 4 से हम पाते हैं कि

$$H(n,t)=1-\left(\frac{q+1}{nt}\right)\frac{\{1+q^2+2q(1-2\sin^2 t/2)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\sin\{nQ(q,t)\}$$

$$=1-\left(\frac{q+1}{nt}\right)\left[1-\frac{qt^2}{(q+1)^2}\right]^{n/2}\left[n\left\{\frac{t}{q+1}+t^3B(t)\right\}\right]$$

$$\leqslant 1-\left[1-\frac{n}{2}\frac{qt^2}{(q+1)^2}\right][1+(q+1)\,t^2B(t)]$$

$$=1-\left[1-\frac{n}{2}\frac{qt^2}{(q+1)^2}+(q+1)\,t^2B(t)\right]$$

$$=t\left[\frac{ntq}{2(q+1)^2}-(q+1)\,tB(t)\right]=0\ (t)$$

4. **प्रमेय की उपपत्ति** : चूंकि $nt<1$.

संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1.3) के आंशिक योग S_n को निम्न द्वारा प्रदर्शित किया जाता है

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}B_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\left[\sum_{k=1}^{n}\sin kt\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\left[\frac{\cos t/2-\cos(n+1/2)t}{2\sin t/2}\right]dt \text{ प्रमेयिका 1(a) द्वारा}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\left[\frac{1-\cos nt}{\tan t/2}+\sin nt\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{\tan t/2}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\,\frac{\cos nt}{\tan t/2}\,dt+o(1) \text{ (रीमान-लेबेस्ग प्रमेय से)}$$

अब S_n के $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n को संकलन विधि की नियमितता द्वारा व्यक्त करते हैं

$$\sigma_n-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\cot t/2\,dt+o(1)$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{\tan t/2}\left[\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{\tan t/2}\left[\frac{\sin(n+1/2)t-\sin t/2}{2\sin(t/2)}\right]dt$$

प्रमेयिका 1(b) से

$$=-\frac{1}{4n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{\tan t/2}\left[(\cos nt-1)+\frac{\sin nt}{\tan t/2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\left[\frac{\sin^2 nt/2}{t}-\frac{\sin nt}{t^2}\right]dt+o(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}Q-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi_0(t)\frac{\sin nt}{t^2}\,dt+o(1) \qquad (4.1)$$

हम लिखेंगे कि

$$Q=\int_0^{\pi}\psi_0(t)\,\frac{\sin^2(nt/2)}{nt}\,dt$$

$$=\left[\int_0^{1/n^{\alpha}}+\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\right]\psi_0(t)\,\frac{\sin^2 nt/2}{nt}\,dt$$

$=Q_1+Q_2$, माना, जहाँ $o<\alpha<1/2$

चूंकि प्रतिबन्ध $\psi_0(t)=0(1)$ प्रमेय की कल्पना से दुर्बल है अतः इसका प्रयोग करने पर हम पाते हैं—

$$Q_1=\int_0^{1/n^{\alpha}}\psi_0(t)\,\frac{\sin^2 nt/2}{nt}\,dt$$

$$=\int_0^{1/\alpha}0(1)\,\frac{0(nt)}{nt}\,dt$$

$=0\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=o(1)$, ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, चूंकि $o<\alpha<1/2$.

तथा

$$|Q_2|\leqslant\frac{1}{n}\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\frac{|\psi_0(t)|}{t}\,dt$$

$$\leqslant\frac{n^{\alpha}}{n}\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}|\psi_0(t)|\,dt$$

$=0\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)0(1)\int|\psi_0(t)|\,dt$ के सांतत्य अंश से

$$=o(1)\,O(1)=o(1),\ \text{ज्यों-ज्यों}\ n\to\infty,\ \text{क्योंकि}\ o<\alpha<1/2.$$

इस तरह हमने दिखाया है कि

$$Q=o(1),\ \text{ज्यों ज्यों}\ n\to\infty.$$

(4.1) तथा (4.2) के आधार पर हम पाते हैं कि

$$\sigma_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_0(t) \cot (t/2)\, dt+o(1)$$

$$=o(1)-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \psi_0(t)\ \frac{\sin nt}{t^2}\, dt \tag{4.3}$$

σ_n के (E, q) रूपान्तर को संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1.3) के आंशिक योग के रूपान्तर $(E, q)\,(C, 1)$ को $(E, 1)$ को $(E, C)_n{}^q$ द्वारा सूचित करने पर हमें (4.2) से संकलन विधि की परिभाषा तथा नियमितता प्राप्त होती है।

$$(EC)_n^q-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_0(t) \cos t/2\, dt+o(1)$$

$$=-\frac{(q+1)^{-(n-1)}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}q^{n-k}\frac{\sin kt}{k}\right]dt$$

$$=-\frac{(q+1)^{-(n-1)}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\ q^{n-k}\sin kt\right]dt$$

$$=-\frac{(q+1)^{-(n-1)}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t^2}\left[I_m\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\ q^{n-k}\, e^{ikt}\right]dt$$

$$=-\ \frac{(q+1)}{n\pi(q+1)^n}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t^2}\,[I_m\{(q+e^{it})^n-1\}]\,dt$$

$$=-\ \frac{(q+1)}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t^2}\,\frac{(1+q^2+2q\cos t)^{n/2}}{(q+1)^n}\ \sin\left\{n\tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{q+\cos t}\right)\right\}dt$$

$$=-\ \frac{q+1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t^2}\ \frac{\{P(q,\,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\sin\{nQ(q,\,t)\}\,dt \tag{4.4}$$

इसके बाद प्रमेयिका 2 का प्रयोग करने पर (4.4) से हम लिखते हैं—

$$(EC)_n^q - \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \psi_0(t) \cot t/2\, dt + o(1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2}\, dt - \frac{q+1}{n\pi} \frac{\psi_0(t)\, \{(q, t)\}^{n/2}}{t^2 (q+1)^n} \sin \{nQ(q, t)\}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{1/n} \frac{\psi_0(t)}{t} \left[1 - \left(\frac{q+1}{nt}\right) \frac{\{P(q, t)\}}{(q+1)^n} \sin \{nQ(q, t)\}\right] dt$$

$$- \frac{q+1}{n\pi}\int_{1/n}^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t^2} \frac{\{P(q, t)\}^{n/}}{(q+1)^n} \sin \{nQ(q, t)\}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} P_1 - \left(\frac{q+1}{\pi}\right) P_2 \text{ माना} \tag{4.5}$$

प्रमेयिका 5 द्वारा तथा $\psi_0(t) = 0(1)$, का प्रयोग करने पर

$$|P_1| = \int_0^{1/n} \frac{0(1)}{t}\, 0(t)\, dt = 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \tag{4.6}$$

P_2 ज्ञात करने के लिए खण्डशः समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$P_2 = \frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi} \psi_0(t) \left[\frac{\{P(q, t)\}^{n/2}}{(q+1)^n} \frac{\sin (nQ(q, t))}{t^2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{n}\left[\{t\psi_1(t)\} \frac{\{P(q, t)\}^{n/2}}{(q+1)^n} \frac{\sin \{nQ(q, t)\}}{t^2}\right]_{1/n}^{\pi}$$

$$- \frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi} \{t\psi_1(t)\} \frac{d}{dt}\left[\frac{\{P(q, t)\}^{n/2}}{(q+1)^n} \frac{\sin \{nQ(q, t)\}}{t^2}\right] dt$$

$$= P_{2\cdot 1} - P_{2\cdot 2}, \text{ माना} \tag{4.7}$$

जहाँ

$$P_{2\cdot 1} = o(1) - \frac{1}{n} \frac{\{P(q, 1/n)\}^{n/2}}{(q+1)^n} \frac{\sin \{nQ(q, 1/n)\}}{1/n} \psi_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= o(1) - \frac{\{P(q, 1/n)\}^{n/2}}{(q+1)^n} \sin \{nQ(q, 1/n)\} \psi_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= o(1) + 0(1)0(1)o(1) = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \tag{4.8}$$

$$P_{2\cdot 2}=\frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi}\{t\psi_1(t)\}\frac{d}{dt}\left[\frac{\{P(q,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\cdot\frac{\sin\{nQ(q,t)\}}{t^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi}\{t\psi_1(t)\}\left[\frac{n\{P(q,t)\}^{n/2-1}}{(q+1)^n}\frac{(-q\sin t)\sin\{nQ(q,t)\}}{t^2}\right.$$

$$+\frac{\{P(q,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\frac{n\cos\{nQ(q.t)\}}{t^2}\frac{q\cos t+1}{P(q,t)}$$

$$\left.-\frac{2\{P(q,t)\}^{n/2}}{q+1)^n}\frac{\sin(nQ(q,t)\}}{t^3}\right]dt$$

$$=\int_{1/n}^{\pi}\frac{\psi_1(t)\{P(q_1\ t)\}^{(n-2)/2}}{t\,(q+1)^n}[q\cos\{nQ(q,t)+t\}+\cos\{nQ(q,t)\}]\,dt$$

$$-\frac{2}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\{P(q,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\sin\{nQ(q,t)\}\,dt$$

$$=z_1-z_2,\ \text{माना}$$

आगे भी हम लिखेंगे

$$z_1=\left[\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}+\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\right]\frac{\psi_1(t)}{t}\frac{\{P(p,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\left[\frac{q\cos\{nQ(q,t)+t\}+\cos\{nQ(q,t)\}}{1+q^2+2q\cos t}\right]dt$$

$=z_{1\cdot 1}+z_{1,2}$, माना जहाँ $o<\alpha<1/2$.

अब हम पाते हैं कि

$$|z_{1\cdot 1}|\leqslant\frac{1}{(q+1)^2}\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}\frac{|\psi_1(t)|}{t}\frac{\{P(q,t)\}^{(n-2)/2}}{(q+1)^{n-2}}\,|[q\cos\{nQ(q,t)+t\}$$

$$+\cos\{nQ(q,t)\}]|\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{(q+1)^2}\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}\frac{|\psi_1(t)|}{t}\,0(1)\,dt$$

$$=0(1)\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}\frac{|\psi_1(t)|}{t}$$

$$=0(1)\left[o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right)+\int o\left(\frac{1}{t\log 1/t}\right)dt\right]_{1/t}^{1/n^{\alpha}}$$

आंशिक समाकल तथा (2.4) से

$$=o(1)+o\left[-\log\log 1/t\right]_{1/n}^{1/n^{\alpha}}=o(1)+o\ \{\log\ 1/\alpha\}$$

$=o(1)$, ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, क्योंकि $o<\alpha<1/2$.

और प्रमेयिका 3 का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$|z_{1\cdot 2}|\leqslant \frac{1}{(q+1)^2}\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\frac{|\psi_1(t)|}{t^2}\,0\left[\ \exp\left\{-\frac{(n-2)qt^2}{2\pi^2}\right\}\right]dt$$

$$=\frac{n^{2\alpha}}{(q+1)^2}\,0\left[\ \exp\left\{-\frac{(n-2)q}{2\pi^2}\ \frac{1}{n^{2\alpha}}\right\}\right]\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}|t\psi_1(t)|\ dt$$

$$=0\left[\frac{n^{2\alpha}}{\exp\dfrac{n^{1-2\alpha}}{2\pi^2}\Big\}}\right]\int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}|t\psi_1(t)|\ \ dt$$

$=o(1)0(1)=o(1)$, ज्यों-ज्यों $n\to\infty$,

चूंकि $o<\alpha<1/2$ **तथा** $\int|t\psi_1(t)|\ dt$ **के सांतत्य अंश से** z_2 **पर विचार करने पर**

$$z_2=\frac{2}{n}\left|\ \int_{1/n}^{1/n^{\beta}}+\int_{1/n^{\beta}}^{\pi}\right|\frac{\psi_1(t)}{t^2}\,\frac{\{P(q,\,t)\}^{n/2}}{(q+1)^n}\ \sin\{nQ(q,\,t)\}\ dt$$

$=2[z_{2\cdot 1}+z_{2\cdot 2}]$, माना, जहाँ $o<\beta<1/3$.

खण्डशः समाकलन करने पर तथा (2.4) का उपयोग करने पर

$$|z_{2\cdot 1}|\leqslant \frac{1}{n}\int_{1/n}^{1/n^{\beta}}\frac{|\psi_1(t)|}{t^2}\ 0(1)\ dt.$$

$$=0\left(\frac{1}{n}\right)\left[\ o\left\{\frac{1}{t\log 1/t}\right\}+2\int o\left(\frac{1}{t^2\log 1/t}\right)dt\right]_{1/n}^{1/n^{\beta}}$$

$$=o(1)+0\left(\frac{2}{n}\right)a\left(\frac{1}{\beta\log n}\right)\int_{1/n}^{1/n^{\beta}}\ \frac{1}{t^2}\ dt$$

$$=o(1)+o\left(\frac{1}{n\log n}\right)[n-n^{\beta}]$$

$=o(1)+o(1)=o(1)$, ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, चूंकि $o<\beta<1/3$.

अन्त में हम पाते हैं

$$|z_{2\cdot 2}| \leqslant \frac{1}{n} \int_{1/n^{\beta}}^{\pi} \frac{|t\psi_1(t)|}{t^3} \, 0(1) \, dt$$

$$< 0 \left(\frac{n^{3\beta}}{n}\right) \int_{1/n^{\beta}}^{\pi} |t\psi_1(t)| \, dt$$

$$= 0 \left(\frac{1}{n^{1-3\beta}}\right) 0(1) = o(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty,$$

समाकल $\int |t\psi_1(t)$ के सांतत्य अंश से तथा चूंकि $o < \beta < 1/3$.

इस प्रकार हम प्रदर्शित कर चुके कि

$$P_{2\cdot 2} = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \tag{4.9}$$

अन्त में (4.5) से (4.9) तक के आधार पर

$$(EC)_n^q - \frac{1}{2\pi} \int_{1/n}^{\pi} \psi_0(t) \cot t/2) \, dt = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty.$$

इससे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो० चन्द्रा तथा डॉ० पी० डी० कैथल के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि ली।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, Oxford at the Clarenden Press, 1967, अध्याय VIII तथा IX, पृष्ठ 178-226.

2. चन्द्रा, पी० Rivista de la Academia de Sciencia Exactas, Fisco-Quimicas **Y**. Nat de Zaragoza, 1977, **32** 47-52.

3. कैथल, पी० डी० तथा शुक्ला, एच० एल०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका 1983, 26.

4. सचान, एम०, पी०, पी-एच० डी० थीसिस, अवधेश प्रताप सिंह विश्वविद्यालय, रीवाँ 1983.

5. शर्मा, पी० एल० राव तथा बीनू गोयल, Annalidi Matematica pura ed applicata IV 1966, LXXIV, 203-225.

6. राय, ओ० पी०, पीएच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, सागर.

7. गुप्ता, आर० आर० The Vikram (Jour. of Vikram Univ. Ujjain), 1978, XXII, (No. 2 and 3) 109-116.

8. दीक्षित, एच० पी०, P. A. M. S., 1969, **21** (1), 10-20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

धात्विक एल्काक्साइडों का रसायन : उत्कृष्टता एवं उत्तरदायित्व

राज कुमार दुबे
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद
तथा
राम चरण मेहरोत्रा
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 5, 1994]

सारांश

धातु एल्काक्साइडों के क्षेत्र में हुई प्रगति के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार के एल्काक्साइडों का संश्लेषण, संरचना तथा कार्बनिक यौगिकों के संश्लेषण में उत्प्रेरक के रूप एवं नवीनतम अतिचालक पदार्थ बनाने के लिए प्रयुक्त S-G प्रक्रम की उपयोगिता का वर्णन किया गया है।

Abstract

Chemistry of metal alkoxides : excellence and accountability. *By* Raj Kumar Dubey, Department of Chemistry, Allahabad University and R. C. Mehrotra, University of Rajasthan, Jaipur.

The synthesis of various types of alkoxides, reactions and properties, structures as well as uses (as catalyst in the Organic synthesis, and in the preparation of super-conducting materials by using S-G process) has been reviewed. Recent approach for the preparation of oxide-alkoxides through non-hydrolytic pathway has also been included.

धातु एल्काक्साइडों[1] के विकास का इतिहास काफी पुराना होने के बावजूद सन् 1950 तक मात्र कुल एल्कली धातुओं, जैसे मैगनीशियम व बोरॉन, एल्यूमिनियम तथा टाइटेनियम के एल्काक्साइड रसायन तक ही सीमित रहा जबकि इस श्रेणी के प्रथम सदस्य की खोज एबेलमान द्वारा सन् 1846 में ही की जा चुकी थी। इस क्षेत्र में तीव्रगति से हुए विकास को आवर्त सारणी 1 के

अन्दर घेरे हुए तत्वों को देखकर ही समझा जा सकता है। इन तत्वों के एल्काक्साइड रसायन का अध्ययन पिछले तीन दशकों से राजस्थान विश्वविद्यालय में प्रोफेसर मेहरोत्रा की प्रयोगशाला में हुआ है।

सारणी 1

आवर्त सारणी

H																	He
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba	Ln*	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	An**															
	Ln*	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	
	An**	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lw	

धातु एल्काक्साइडों को सामान्य सूत्र, $E(OR)_n$ से प्रदर्शित किया जा सकता है। एल्काक्साइड के आक्सीजन परमाणु की उच्च विद्युत ऋणीय प्रकृति के होने के परिणामस्वरूप $E^{\delta+}$—O—$C^{-\delta}$ बन्ध में स्पष्ट ध्रुवण होता है। फिर भी एल्काक्साइडों के अन्दर वाष्पशील तथा कार्बनिक विलायकों में विलेयता का गुण पाया जाता है (केवल मिथाक्सी व्युत्पन्न अपवाद हैं)। वे एल्काक्साइड अपवाद हैं जिनमें केन्द्रीय तत्व E=B व Si है लगभग सभी एल्काक्साइड ओलियोमेरिक स्पीशीज के रूप में होते हैं जिसका प्रमुख कारण एल्काक्सी सेतुओं E—O—E का बनना है जो एल्किल समूह की बहुशाखिता से त्रिविम बाधा (steric hindrance) होने से बनते हैं।

समधात्विक एल्काक्साइडों के साथ ही बहुत से विषम बहुधात्विक एल्काक्साइडों का वर्णन पिछले दो दशकों में किया जा चुका है। इनके अन्दर भिन्न-भिन्न धातुओं के बीच उपस्थित E—O(R)—E सेतुओं में सामान्य से अधिक स्थायित्व पाया गया। सामान्य रूप से इससे विषम धात्विक सवर्गीकरण स्पीशीज के लिए एक नई दिशा मिली।

इस समीक्षा के अन्तर्गत सन् 1962 से राजस्थान विश्वविद्यालय की रसायन प्रयोगशाला में दर्जनों शोधकर्मियों द्वारा किये गये उत्तमोत्तम कार्य का विवरण, विशेषतया पिछले कुछ वर्षों में सम्पन्न शोधकार्य पर बल दिया गया है।

सन् 1952-53 में प्रकाशित लेखों[8] की श्रेणियों में आने वाले Si, Ti, Zr और Hf के एल्काक्साइडों के संगुणन की मात्रा और वाष्पशीलता को सारणी 2 में दर्शाया गया है जो त्रिविम पर निर्भर कर रहा है।

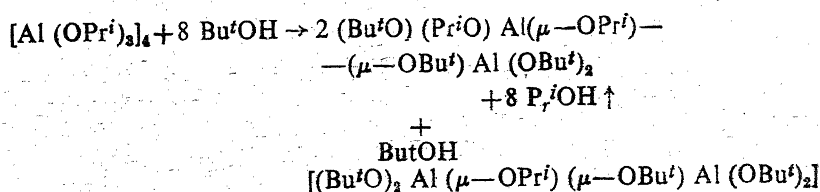
सारणी 2

Si $(OR)_4$ और Ge $(OR)_4$ एकलक व वाष्पशील हैं।

	n-ब्युटाक्साइड	S-ब्युटाक्साइड	T-ब्युटाक्साइड
वाष्पशीलता	245°/mm	150°/mm	45°/mm
Zr $(OR)_4$: आणविक संगुणन	3-4	2	1

Hf $(OR)_4$: संगुणनकीमात्रा उपर्युक्त जैसी ही है परन्तु वाष्पशीलता थोड़ा अधिक है।

समान त्रिविम प्रभाव एल्यूमिनियम के एल्काक्साइडों के लिये स्थापित किया गया है जो केवल भौतिक गुणों[3] में ही नहीं बल्कि रासायनिक सक्रियता में भी दर्शाया गया है। जैसे; $Al(OP_ri)_3$ की एल्कोहालिसिस और ट्रान्स एस्टरीफिकेशन अभिक्रियायें :



$$[Al(OPr^i)_3]_4 + 8\,Bu^tOH \rightarrow 2\,(Bu^tO)(Pr^iO)Al(\mu\text{—}OPr^i)\text{—}(\mu\text{—}OBu^t)Al(OBu^t)_2 + 8\,P_r{}^iOH\uparrow$$

$$+\ ButOH$$

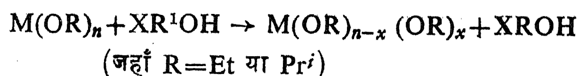
$$[(Bu^tO)_2Al(\mu\text{—}OPr^i)(\mu\text{—}OBu^t)Al(OBu^t)_2]$$

एल्यूमिनियम आइसोप्रोपाक्साइड में ऐजींग-घटना पायी जाती है जो वाष्प अवस्था में द्विलक, ताजा वाष्पित द्रव में त्रिलक एवं रखने के पश्चात् चर्तुलक तथा इसके बाद भी संगुणन की प्रवृत्ति अत्यधिक धीमी गति से होती पायी जाती है। एल्यूमिनियम आइसोप्रोपाक्साइड, $[Al(OPr^i)_3]_4$ की प्रदर्शित संरचना[4] में केन्द्रीय एल्यूमिनियम परमाणु, अष्ठफलकीय वातावरण में होता है जो तीन कीलेटीकारक चतुष्फलकीय $Al(OPr^i)_4^-$ समूहों, $[(Pr^iO)_2Al(OPr^i)_2Al]$ द्वारा घिरा रहता है।

इस संरचना $[Al(Al\{Opr^i)_4\}_3]$ के अस्तित्व $[Ln\{Al(OPr^i)_4\}_3]$ की संरचना का एक वास्तविक प्रमाणित किया हुआ उदाहरण है जो एकलक एवं वाष्पशील द्विधात्विक टेट्रा आइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेटो[5] में भी पाया गया है। इस प्रकार $[Al\{Al(OPr^i)_4\}_3]$ सम तथा विषम धात्विक एल्काक्साइडों के बीच के समानान्तरीकरण को दर्शाता है।

धात्विक एल्काक्साइडों के रासायनिक गुणों में हाइड्राक्सी यौगिकों के साथ अति लाक्षणिक सुलभ सक्रियता पायी गयी है। इसी कारण से इनके संश्लेषण के समय आर्द्रता को हटाने के लिये अत्यधिक सावधानी बरतनी पड़ती है जिसको धात्विक एल्काक्साइडों की क्रमबद्ध जलअपघटन की क्रिया में प्रेक्षित किया जा सका है जो अब तीव्र विकासशील S-G प्रक्रम में प्रकट हुआ है जिसके द्वारा आक्साइड सेरेमिक पदार्थों[6] को बनाया जा रहा है।

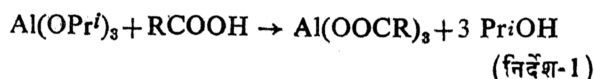
धातु एल्काक्साइडों की अभिक्रिया एल्कोहल, β-डाइकिटोनों और कार्बोक्सीलीक अम्लों के साथ सम्पन्न होने के फलस्वरूप अनेक उत्पादों का संश्लेषण सम्भव हुआ है। इन्हें निम्न रासायनिक समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया गया है :



$$M(OR)_n + XR^1OH \rightarrow M(OR)_{n-x}\,(OR)_x + XROH$$

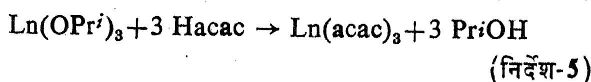
(जहाँ R=Et या Pr^i)

एक सुविधाजनक निम्न ताप पर उबलने वाला एजियोट्राप बनाने के लिये विलायक बेन्जीन को प्रयोग में लाया गया है जिसका प्रभाजन करने से इन अभिक्रियाओं के पूर्ण होने का निश्चयन किया जाता हैं। इसके बाद कम दाब पर आसवन या क्रिस्टलन के प्रक्रम के द्वारा शुद्ध उत्पाद प्राप्त किया जाता है। इस सुविधाजनक मार्ग से बहुत सारे व्युत्पन्नों को बनाया गया है जिनमें से $Al(OOCR)_3$ और $Ln(acac)_3$ का संश्लेषण निम्न प्रकार से किया गया है जिनके लिये दर्जनों असफल प्रयासों का वर्णन पहले के साहित्य में मिलता है।



$$Al(OPr^i)_3 + RCOOH \rightarrow Al(OOCR)_3 + 3\ Pr^iOH$$

(निर्देश-1)



$$Ln(OPr^i)_3 + 3\ Hacac \rightarrow Ln(acac)_3 + 3\ Pr^iOH$$

(निर्देश-5)

इसके अतिरिक्त धात्विक एल्काक्साइडों के अन्य सम्प्रयोगों द्वारा तत्वों के अनेक उत्पादों का संश्लेषण किया गया है जिन्हें पूरी आवर्त सारणी में देखा जा सकता है। इनमें से अधिकतर को, सुविधानुसार, किन्हीं अन्य मार्गों द्वारा नहीं बनाया जा सकता है। लिगैन्ड, R^1OH की बहुदन्तुर प्रकृति की सम्भावना के कारण इच्छित एवं स्पष्ट संवर्गीय अवस्था के उत्पाद प्राप्त किये जा सके हैं तथा इनकी संरचनात्मक रूपरेखा संवर्गीय रसायनज्ञों के लिये अधिक रुचिकर हो सकी है।

समधात्विक एल्काक्साइड रसायनों की समीक्षा हाल ही में अनेक लेखों[7-10] में की गई है। हमारा निबन्ध मुख्य रूप से बहुधात्विक आक्साइडों पर सीमित होगा।

बहुधात्विक एल्काक्साइड (Heterometal Alkoxides)

इस प्रकार के एल्काक्साइड स्वयं एक ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य को दर्शाते हैं। विषम धात्विक एल्काक्साइड रसायनों के विकास का प्रारम्भ "एल्कॉक्सो साल्ट" जैसे, $Na\ Al\ (OR)_4$ के बनने के प्रमाण से हुआ जिसे सर्वप्रथम "मीरवाइन तथा बरसिनी" द्वारा क्षारीय एल्काक्साइड और अन्य निम्न विद्युत धनीय धातु एल्काक्साइडों के मध्य आयतनात्मक अनुमापन द्वारा प्रेक्षित किया गया है। स्थायी एवं वाष्पशील द्विधात्विक व्युत्पन्न, $[Na\{Zr_2(OR)_9\}]$ का संश्लेषण एवं पृथक्करण बार्टल तथा वारडल[12] द्वारा किया गया था। इस प्रकार के बहुत से तत्वों के अनेक "द्विगुण एल्काक्साइड" व्युत्पन्नों को मेहरोत्रा की शोधशाला[13] में संश्लेषित किया गया था, जो वाष्पशील एवं कार्बनिक यौगिकों में घुलनशील पाये

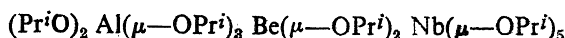
गये जिससे उनके सहसंयोजक गुणों की पुष्टि भी होती है। इस संदर्भ में पहली समीक्षा "Chemistry of Double Alkoxide of Various Elements" सन् 1971 में प्रकाशित[13] की गई। तत्पश्चात् द्विगुण एल्काक्साइडों के सामान्य सर्वेक्षण द्वारा पुन: एक अन्य समीक्षा[7], जो संक्रमण धातु एल्काक्साइडों के रसायन को दर्शाती है, प्रकाशित हुई।

प्रथम त्रिधात्विक एल्काक्साइड



$(Pr^iO)_2\ Al(\mu-OPr^i)_2\ Be(\mu-OPr^i)_2\ Zr(OPr^i)_3$

और



$(Pr^iO)_2\ Al(\mu-OPr^i)_3\ Be(\mu-OPr^i)_2\ Nb(\mu-OPr^i)_5$

का संश्लेषण सर्वप्रथम 1985 में मेहरोत्रा एवं अग्रवाल[14] ने किया। बाद में कॉपर[15] एवं अन्य परवर्ती संक्रमण धातुओं[16] के त्रि-एवं चर्तु-धात्विक एल्काक्साइडों का संश्लेषण एवं पृथक्करण किया गया।

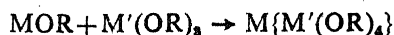
"Glasses and Glass-Ceramics from Gels" पर चौथी अन्तर्राष्ट्रीय कार्यशाला (कियोटो, जुलाई 1988) में डिशलिच[17] के साथ मेहरोत्रा[18] द्वारा विचार-विमर्श से स्पष्ट हुआ कि डिशलिच ने सन् 1971 के प्रारम्भ में ही कई धातु एल्काक्साइडों के मिश्रित विलयन से बहुधात्विक एल्काक्साइड संकुलों की उत्पत्ति की कल्पना की जो "Polymetallic Alkoxides-Precursors for Ceramics" शीर्षक से प्रकाशित हुई जिसमें अनेक पूर्वगामी सम्भावित अनुप्रयोगों जैसे, S-G प्रक्रम का विशेष दृष्टिकोण मेहरोत्रा[19] द्वारा दिया गया था। बहुधात्विक एल्काक्साइडों की वास्तविकता एवं संगुणित रूप जैसे M(OR)n X एकधातु-तन्त्र के लिये दर्शाया गया था जो स्पष्ट नहीं था फलत: हाल के अनेक समीक्षाओं[9,10,20–26] में धीरे-धीरे "विषम धात्विक एल्काक्साइडों" पद का प्रयोग किया जाने लगा है— उन सभी एल्काक्साइड स्पीशीजों के लिये, जिनमें दो, तीन, चार या प्राय: भिन्न धातु परमाणु एक ही आणविक स्पीशीज में उपस्थित हैं।

द्विधात्विक एल्काक्साइडों का संश्लेषण

संश्लेषण हेतु बहुधा अनेक विधियों का प्रयोग हुआ है, विशेष तौर पर द्विधात्विक एल्काक्साइडों का संश्लेषण मुख्यतया दो प्रमुख निर्णायक दरों[22] को हम लोगों की प्रयोगशाला में अपनाया गया। अनेक प्रकार के एवं बहु संख्या में विषम-धात्विक एल्काक्साइडो[23,24] और उनके व्युत्पन्नों का वर्णन किया गया।

(1) अवयवी एल्काक्साइडों द्वारा

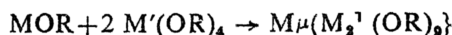
मिरवीन[11] एवं वार्डला[12] के योगदान के बाद इस विधि का प्रयोग विषम धात्विक एल्काक्साइडों को बनाने के लिये अत्यधिक रूप से किया गया[25,26] जिनमें विशेषतया एल्कली धातुओं, Li, Na, K, Rb व Cs का कई कम विद्युत धनीय धातुओं, Al, Ga, Sn (IV), Ti, Zr, Hf, Ce (IV), Tn, U(IV)[28], Nb(V), Ta(T) and U(V)[1] आदि के साथ संश्लेषण किया गया है। इन्हें निम्न रासायनिक समीकरणों द्वारा प्रदर्शित किया गया है :



$$MOR+M'(OR)_3 \rightarrow M\{M'(OR)_4\}$$



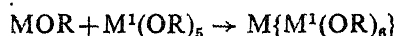
$$(M=Li, Na, K, Rb, Cs; M'=Al, Ga, Fe; R=Et\ Pr^i, Bu^t)$$



$$MOR+2\ M'(OR)_4 \rightarrow M\mu(M_2{}^1\ (OR)_9\}$$



$$(M=4, Na, C, M'=Zr, Th, Ce(IV), U(IV), Sn(IV), R=(Et,P_ri)$$



$$MOR+M^1(OR)_5 \rightarrow M\{M^1(OR)_6\}$$

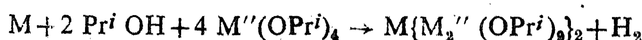


$$(M=Li, Na, K, M^1=Nb, Ta, U; R=Me, Et, Pr^i, Bu^t)$$

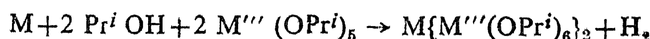
एक संयोगी एल्कली धातुओं के विलेयशील एल्काक्साइडों की तुलना में द्विसंयोगी क्षारीय मृदा धातुओं के एल्काक्साइड अत्यल्प विलेय होते हैं तथा इसकी घुलनक्षमता एल्कोहल में और भी कम पायी गई। सम्भवतः इनके ऊपर अघुलनशील सतह का बन जाना है। जबकि एल्कोहाल में इनकी घुलनशीलता एल्यूमिनियम, नायोबियम, जर्कोनियम इत्यादि के एल्काक्साइडों की उपस्थिति में पूर्णतया त्वरित हो जाती है। स्टॉकियोमेट्रिक अनुपात में अभिक्रियाओं को निम्नलिखित समीकरणों द्वारा प्रदर्शित किया जा रहा है: इससे वाष्पशील, घुलनशील, एकलक क्षारीय, मृदा धातुओं (M=Mg, Ca, Sr, and Ba) के द्विधात्विक एल्काक्साइडों को आसानी से संश्लेषित[25,26] किया गया है :



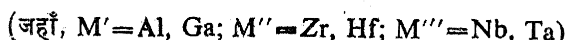
$$M+2\ Pr^i\ OH+2\ M'(OPr^i)_3 \rightarrow M\{M'(OPr^i)_4\}+H_2$$



$$M+2\ Pr^i\ OH+4\ M''(OPr^i)_4 \rightarrow M\{M_2''\ (OPr^i)_9\}_2+H_2$$



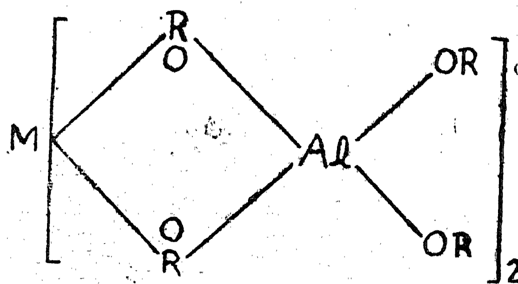
$$M+2\ Pr^i\ OH+2\ M'''\ (OPr^i)_5 \rightarrow M\{M'''(OPr^i)_6\}_2+H_2$$



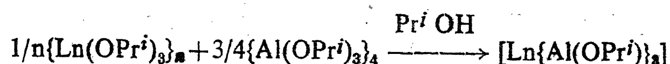
(जहाँ, $M'=Al, Ga; M''=Zr, Hf; M'''=Nb, Ta$)

बिना किसी प्रमाण के ऐसी राय दी गई[22] कि इस प्रकार की अभिक्रिया उदाहरण के लिये एल्कोहॉल और $Al(OPr^i)_3$ के मध्य की अधिक क्रियाशीलता, जटिल संकुल, $H\ Al(OPr^i)_4$ के बनने के फलस्वरूप अम्लता के बढ़ने से है।

सभी द्विसंयोगी धातुओं के द्विधात्विक एल्काक्साइड, एकलक एवं वाष्पशील स्पीशीज हैं जो कि कार्बनिक विलायकों में घुलनशील पाये गये वहीं पर अनेक समतुल्य साधारण एल्काक्साइड, सामान्यतया, बहुलक, अवाष्पशील एवं अघुलनशील हैं। इनके अणुभारों एवं स्पेक्ट्रोस्कोपिक विशेषतया 'H NMR अध्ययन के आधार पर निम्न प्रकार की साधारण संरचना दर्शायी गयी है :



यह रुचिकर रहा है कि लैन्थेनाइड धातुओं (Ln) के द्विधात्विक टेट्रा-एल्काक्सी एल्यूमिनेटों का संश्लेषण, लैन्थेनाइड तथा एल्यूमिनियम आइसोप्रोपाक्साइड के मिश्रण को आइसोप्रोपेनॉल में अधोवाहित (reflux) करने के फलस्वरूप प्राप्त किया गया :

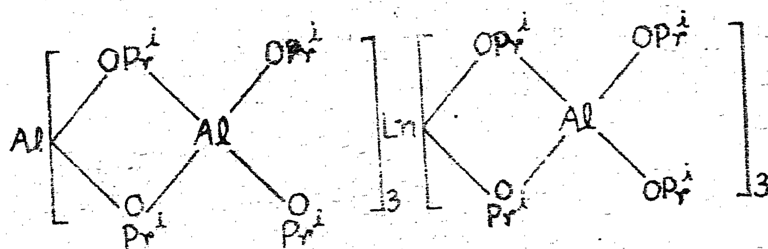


$$1/n\{Ln(OPr^i)_3\}_n + 3/4\{Al(OPr^i)_3\}_4 \xrightarrow{Pr^i\,OH} [Ln\{Al(OPr^i)\}_3]$$

आइसोप्रोपाक्साइडों के मिश्रण को कुछ समय (लगभग 1/2 घण्टा) तक पश्चवाहित (reflux) करने के बाद मिश्रण से विलायक के आधिक्य को आसवन द्वारा अपलिप्त (stripped off) किया गया हैं तथा द्विधात्विक लैन्थेनाइड ट्रिस टेट्राआइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेट को लगभग 180-160°C/ 0.1 mm Hg दाब पर आसवित किया जा सकता है ।

इनके क्वथनांक लैन्थेनम से ल्यूटेसियम तक घटते जा रहे हैं जिसे क्रमशः अणु भारों के घटते हुए क्रम और सम्भवतः लैन्थेनाइट संकुचन के कारण सहसंयोजक गुणों का बढ़ना सम्भव है । संघटक आइसो-प्रोपाक्साइडों के मिश्रण से वाष्पशील, एकलक, $Ln\{Al\ OPr^i)_4\}_3$ स्पीशीज बनता है जिसके दोनों संघटक संगुणित अणु हैं जो आणविक स्पीशीज के स्थायित्व को दर्शाता है। वास्तव में, उपर्युक्त रासायनिक अभिक्रिया मिश्रण में एल्यूमिनियम आइसोप्रोपाक्साइड को आधिक्य में लिया गया हो तो यह लगभग 100°C ताप व 1 mm दाब पर सर्वप्रथम आसवित होता है, बाद में लगभग मात्रात्मक लब्धि में 170°C पर $Ln\{Al\ (OPr^i)_4\}_3$ प्राप्त होता है । इसके विपरीत अगर लैन्थेनाइड आइसो-प्रोपाक्साइड उच्च आणविक अनुपात में लिया गया है तो $Ln\{Al(OPr^i)_4\}_3$ स्पीशीज प्रारम्भ में आसवित होता है और आधिक्य में कम वाष्पशील $\{Ln(OPr^i)_3\}_n$ वहीं पर पड़ा रहता है ।

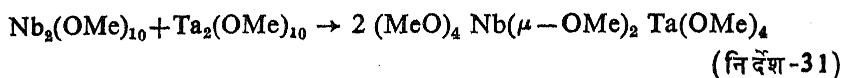
द्रव्यमान वर्ण क्रमिकी (mass spectroscopic) और नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद (NMR) के अध्ययनों द्वारा द्विधात्विक लैन्थेनाइड टेट्राआइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेटों के लिये निम्नलिखित साधारण संरचना का सुझाव दिया गया है जो चतुर्लक एल्यूमिनियम आइसोप्रोपाक्साइड (जिसकी संरचना ^1H व ^{27}Al NMR द्रव्यमान वर्ण क्रमिकी व वास्तविक X-किरण के अध्ययन द्वारा दर्शाया गया है ।



की संरचना जैसी ही है ।

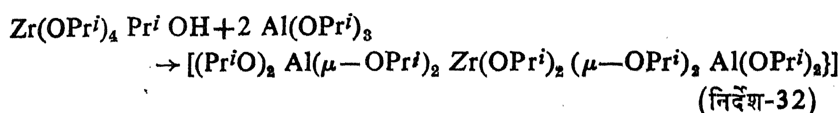
हाल ही में, यिट्रियम की अभिक्रिया आइसोप्रोपेनॉल में करने पर, सम्भावित $Y(OPr^i)_3$ उत्पाद के स्थान पर $1/5(\mu_5{=}O\,(\mu_3{-}OPr^i)_4\,(\mu{-}OPr^i)_4\,(OPr^i)_5$ को अभिलक्षित[29] किया गया है। आगे चलकर यह पाया गया कि क्रिस्टलीय आक्साइड-एल्काक्साइड की अभिक्रिया $Al\,(OPr^i)_3$ के साथ नहीं होती है क्योंकि $Y\{Al(OPr^i)_4\}_3$ नहीं प्राप्त होता है। जबकि, मूल अभिक्रिया मिश्रण में $Al(OPr^i)$ मिलाने पर, इसे लगभग 70% लब्धि में प्राप्त किया गया है। इस प्रेक्षण[30] से यह स्पष्ट है कि द्विधात्विक आइसोप्रोपाक्साइड, $Y\{Al(OPr^i)_4\}_3$ का स्थायित्व अधिक है।

क्षार, क्षारीय मृदा एवं लैन्थेनाइड धातुओं के द्विधात्विक एल्काक्साइडों के साथ-साथ, कुछ अन्य द्विधात्विक एल्काक्साइडों का संश्लेषण घटक एल्काक्साइडों के मिश्रण से किया गया है :



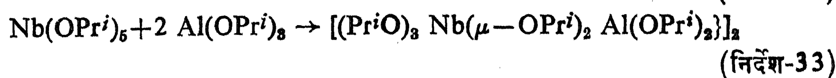
$$Nb_2(OMe)_{10}+Ta_2(OMe)_{10} \rightarrow 2\,(MeO)_4\,Nb(\mu{-}OMe)_2\,Ta(OMe)_4$$

(निर्देश-31)



$$Zr(OPr^i)_4\,Pr^iOH+2\,Al(OPr^i)_3 \rightarrow [(Pr^iO)_2\,Al(\mu{-}OPr^i)_2\,Zr(OPr^i)_2\,(\mu{-}OPr^i)_2\,Al(OPr^i)_2\}]$$

(निर्देश-32)

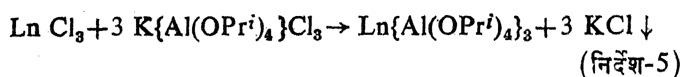


$$Nb(OPr^i)_5+2\,Al(OPr^i)_3 \rightarrow [(Pr^iO)_3\,Nb(\mu{-}OPr^i)_2\,Al(OPr^i)_2\}]_2$$

(निर्देश-33)

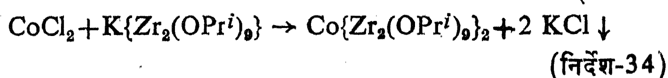
(ii) धातु हैलाइडो (नाइट्रेटों) की अभिक्रिया एल्कली एल्काक्सों मेटेलेटों द्वारा—

यह विधि निम्नलिखित अभिक्रियाओं द्वारा दर्शायी जी सकती है :



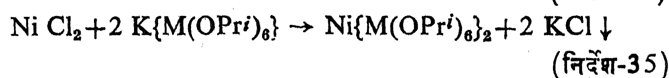
$$Ln\,Cl_3+3\,K\{Al(OPr^i)_4\}Cl_3 \rightarrow Ln\{Al(OPr^i)_4\}_3+3\,KCl\downarrow$$

(निर्देश-5)



$$CoCl_2+K\{Zr_2(OPr^i)_9\} \rightarrow Co\{Zr_2(OPr^i)_9\}_2+2\,KCl\downarrow$$

(निर्देश-34)

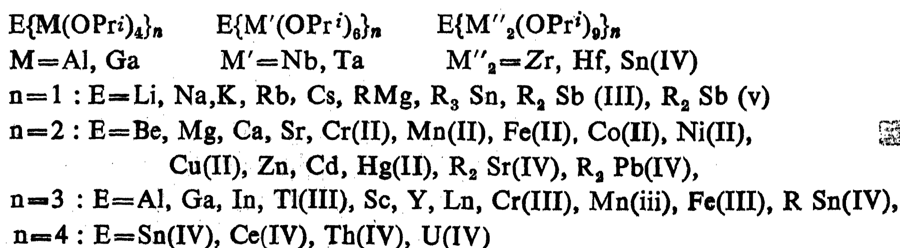


$$Ni\,Cl_2+2\,K\{M(OPr^i)_6\} \rightarrow Ni\{M(OPr^i)_6\}_2+2\,KCl\downarrow$$

(निर्देश-35)

(जहाँ μ=Nb/या Ta)

वास्तव में, अनेक प्रकार के द्विधात्विक एल्काक्साइडों का संश्लेषण उपर्युक्त विधि से किया गया है जिन्हें निम्नलिखित सचित्र उदाहरणों द्वारा दर्शाते हैं जहाँ 'E' तत्व की, 'n' संयोजकता :



$E\{M(OPr^i)_4\}_n$ $E\{M'(OPr^i)_6\}_n$ $E\{M''_2(OPr^i)_9\}_n$

M=Al, Ga M'=Nb, Ta M''_2=Zr, Hf, Sn(IV)

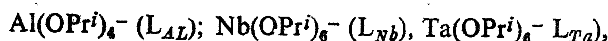
n=1 : E=Li, Na,K, Rb, Cs, RMg, R_3 Sn, R_2 Sb (III), R_2 Sb (v)

n=2 : E=Be, Mg, Ca, Sr, Cr(II), Mn(II), Fe(II), Co(II), Ni(II), Cu(II), Zn, Cd, Hg(II), R_2 Sr(IV), R_2 Pb(IV),

n=3 : E=Al, Ga, In, Tl(III), Sc, Y, Ln, Cr(III), Mn(iii), Fe(III), R Sn(IV),

n=4 : E=Sn(IV), Ce(IV), Th(IV), U(IV)

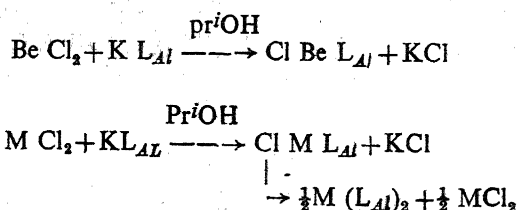
कीलेट, एल्काक्सोमेटेलेट लिगैन्डो, जैसे $M(OR)_4^-$, $M'(OR)_6^-$, और $M_2(OR)_9^-$ को संक्षिप्त में 'L' के रूप में प्रयुक्त कर सकते हैं और जिसमें से अधिक साधारण को, विशिष्ट लिगैन्ड के कोष्टक से बाहर लिखते हैं :



$$Al(OPr^i)_4^- \ (L_{AL}); \ Nb(OPr^i)_6^- \ (L_{Nb}), \ Ta(OPr^i)_6^- \ L_{Ta}),$$

तथा दोनों को साथ में जैसे (L_M); और $Zr_2 \ (OPr^i)_9^-$ (LZr)

एक ही प्रकार के (Homoleptic) व्युत्पन्नों, ELn, के साथ ही अल्पविस्थापित (part ially substiluted) क्लोरोमेटल एल्काक्सोमेटेलेटों को भी हाल ही में संश्लेषित किया गया है। उदाहरणस्वरूप, Be Cl_2, Mg Cl_2, Zn Cl_2, Cd Cl_2 की अभिक्रिया[36] के साथ 1 : 1 मोलर अनुपात में करने से सम्भावित उत्पाद, Cl Be L_{Al}, को पृथक (isolate) किया गया है जबकि अन्य अभिक्रियाओं में उत्पादों का तुरन्त ही उनके अवयवों, MCl_2 तथा $M(L_{Al})_2$ में अपघटित (disproportionate) होता प्रतीत हुआ :



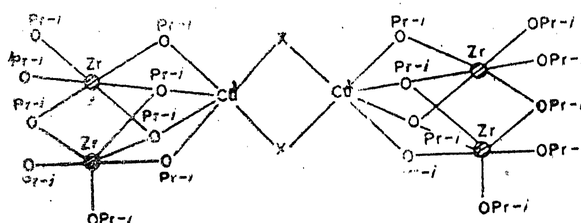
$$Be\ Cl_2 + K\ L_{Al} \xrightarrow{pr^iOH} Cl\ Be\ L_{Al} + KCl$$

$$M\ Cl_2 + KL_{AL} \xrightarrow{Pr^iOH} Cl\ M\ L_{Al} + KCl \rightarrow \tfrac{1}{2}M\ (L_{Al})_2 + \tfrac{1}{2}\ MCl_2$$

जबकि, अभिक्रिया की दशा को थोड़ा नियन्त्रण में रखा गया तो $[Cl\ Zn\ L_{Al}]_2$ और $[\ Cl\ Cd\ L_{Al}]_2$ व्युत्पन्न को प्राप्त किया गया; इतना ही नहीं बल्कि अनेको अन्य क्लोराइड—धात्विक आइसोप्रोपाक्सी-मेटेलेटों का भी संश्लेषण किया जा सका है।

धातु हैलाइडों और एल्कली एल्काक्सी मेटेलेटों के मध्य अलग-अलग आणुक अनुपातों में अभि-क्रिया करने पर निम्न प्रकार के व्युत्पन्नों का बनाया जा सकता है जैसे, Cl Co L_{Al}, Cl Co $L_{M'}$ व Cl Co LZr[37], Cl Fe $L_{M'}$[38], Cl Cu L_{Al}, Cl Cu LTa और Cl Cu LZl[39], Cl La $(L_{Zr}]_2$ तथा Cl_2 La LZr[40]

वास्तविक व स्थाई कठिनाइयों[40] के उपस्थित होने के बावजूद, $[Cd(\mu—Cl)\ L_{Zr}]_2$[42] व $[Pr\ L_{Al}]_2\ (\mu—Cl)\ Pr^i\ OH$[43] की क्रिस्टलीय संरचनाओं को स्पष्ट करना सम्भव हुआ है। यह बड़ा ही रोचक रहा है कि दोनों ही द्विलक व्युत्पन्न, क्लोराइड द्वारा सेतु बनाते हैं (न कि आइसोप्रोपाक्साइड द्वारा)।



चित्र 1 : X-किरण संरचना

(क) [Cd Zr_2 $(OPr^i)_9$ $(\mu$—Cl$]_2$ (निर्देश-42) और

(ख) [Pr Al $(OPr^i)_4\}_2$ (Pr^iOH) $(\mu$—Cl$]_2$ (निर्देश-43)

इन क्लोराइड-धात्विक एल्कोक्सी मेटेलेटों को एल्कली एल्काक्साइडों के साथ उचित आणविक अनुपातों में अभिक्रिया करने पर एल्काक्साइड-धात्विक एल्काक्सी मेटेलेटों में परिवर्तित हो जाते हैं।

प्रारम्भिक प्रयुक्त पदार्थ क्लोराइड के स्थान पर $(NH_4)_2$ Ce $(NO_3)_6$[37] का उपयोग करके एक धात्विक सेरिक एल्काक्साइड व्युत्पन्न, Ce $(NO_3)_{n-x}$ (OBu^t) Ce $(NO_3)_{n-x}$ $\{OBu^t)$ THF ही नहीं बल्कि क्षार धातुओं के साथ अभिक्रिया करके द्विधात्विक एल्काक्साइडों को भी बनाया गया है,

उदाहरणार्थ,



$$(NH_4)_2\,Ce\,(NO_3)_6 + 8\,Na\,OBu^t \rightarrow$$

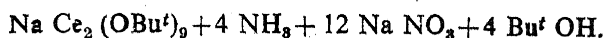


$$Na_2\,Ce\,(OBu^t)_6 + 4\,THF + 2\,NH_3 + 6\,NH_4\,NO_3 + 2\,Bu^t\,OH,$$

और



$$2(NH_4)_2\,Ce\,(NO_3)_6 + 13\,Na\,OBu^t \rightarrow$$

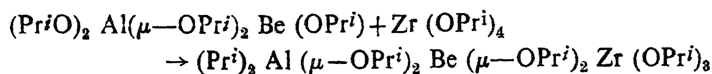


$$Na\,Ce_2\,(OBu^t)_9 + 4\,NH_3 + 12\,Na\,NO_3 + 4\,Bu^t\,OH.$$

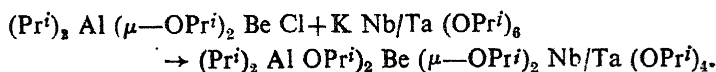
(iii) त्रि-और उच्च विषम धात्विक एल्काक्साइडों का संश्लेषण

सन् 1967-85 के मध्य, बहुत सारे स्थाई द्विधात्विक एल्काक्साइडों के संश्लेषण में विशिष्ट सफलता, Al $(OPr^i)_4^-$ (L_{AL}), Nb $(OPr^i)_6^-$ (L_{Nb}), Ta $(OPr^i)_6^-$ (L_{Ta}) और Zr_2 $(OPr^i)_9$ (L_{Zr}) लिगैन्डों के साथ मिली है। ऐसे स्पीशीज, जिनमें दो धातुओं से अधिक धातु एक ही अणु के अन्दर निहित हों इसका कभी प्रयत्न तक नहीं किया गया। विषम धात्विक एल्काक्साइड व्युत्पन्न में सामान्य अस्थायित्व ही दृष्टिगत रहा है। सर्वप्रथम, त्रिधात्विक एल्काक्साइड 1985 में बेरिलियम (Be) के साथ खोज किया गया था जो बेरेलियम के सूक्ष्म आकार होने के कारण किया गया क्योंकि सूक्ष्म आकार के होने से इस स्पीशीज का अपने अवयवों में टूटना सम्भव नहीं हुआ। उत्पाद, (Pr^iO) Be $(\mu$—$OPr^i)_2$ Al $(OPr^i)_2$ को नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद (NMR) अध्ययन के आधार पर पाया गया है कि

समयोपरान्त, उपर्युक्त उत्पाद एक नये उत्पाद, $(Pr^iO)_4\ Al(\mu\text{—}OPr^i)_2\ Be\ (\mu\text{—}OPr^i)_2\ Al(OPr^i)_4$ में परिवर्तित हो गया है। यह प्रेक्षण निम्न प्रकार की अभिक्रियाओं की सम्भावनाओं को दर्शाता है जिसके फलस्वरूप सर्वप्रथम सन् 1985 में त्रि-धात्विक एल्काक्साइड[14] का संश्लेषण किया गया :

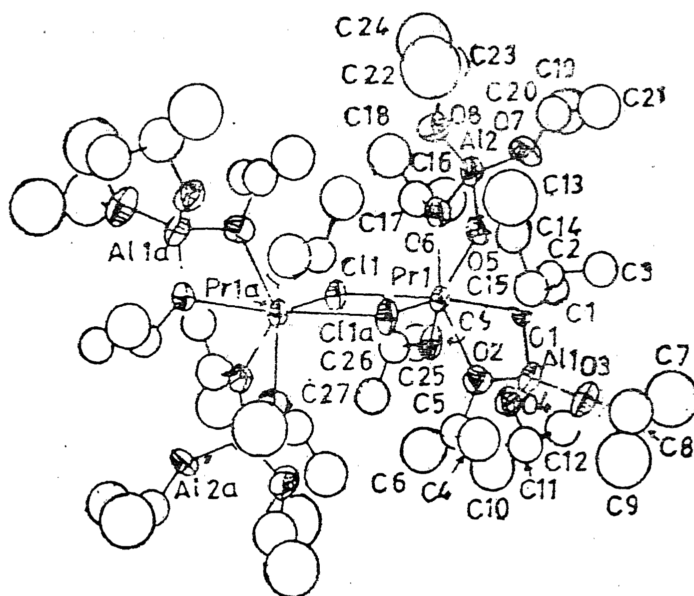


$$(Pr^iO)_2\ Al(\mu\text{—}OPr^i)_2\ Be\ (OPr^i) + Zr\ (OPr^i)_4 \rightarrow (Pr^i)_2\ Al\ (\mu\text{—}OPr^i)_2\ Be\ (\mu\text{—}OPr^i)_2\ Zr\ (OPr^i)_3$$

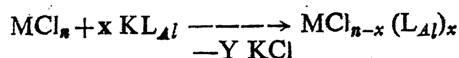


$$(Pr^i)_2\ Al\ (\mu\text{—}OPr^i)_2\ Be\ Cl + K\ Nb/Ta\ (OPr^i)_6 \rightarrow (Pr^i)_2\ Al\ OPr^i)_2\ Be\ (\mu\text{—}OPr^i)_2\ Nb/Ta\ (OPr^i)_4.$$

लैन्थेनाइडों[9,44,45], जिंक व कैडमियम[46,47], टिन(II)[48,49] व (IV), मैंगनीज(II)[50], आयरन (II)[51], आयरन (III)52, कोबाल्ट (II)[53], निकिल[54], कापर[55] के बहुत से विषम धात्विक एल्काक्साइडों को प्रोफेसर मेहरोत्रा की शोधशाला में संश्लेषित एवं अभिलक्षित किया गया है। ये सब एक केन्द्रीय धातु परमाणु, जो एक, दो या अधिक लिगैन्डों जैसे, L_{Al}, L_{Zr}, L_{Nb} या L_{Ta} और दो अन्य लिगैन्डों जैसे,



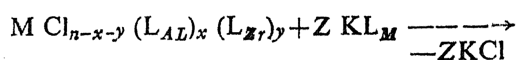
$Zr(OPr^i)_5$ व $Al\ (OBu^t)_4$, द्वारा जुड़े होते हैं जो अनेक विषम धात्विक एल्काक्साइड तन्त्र[9,54] के अन्दर अत्याधिक स्थायित्व प्रदान करता है। इसको बनाने के सामान्य विधि को साधारणतया निम्न रूप से दर्शाया जा सकता है :



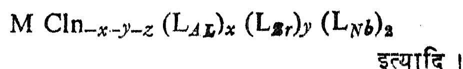
$$MCl_n + x\ KL_{Al} \xrightarrow[-Y\ KCl]{} MCl_{n-x}\ (L_{Al})_x$$



$$ML_{n-y}\ (L_{Al})_x + Y\ KL_{Zr} \xrightarrow[-Y\ KCl]{} MCl_{n-x-y}\ (L_{Al})_x\ (L_{Zr})_y$$



$$M\,Cl_{n-x-y}\,(L_{AL})_x\,(L_{Zr})_y + Z\,KL_M \xrightarrow[-ZKCl]{}$$



$$M\,Cl_{n-x-y-z}\,(L_{AL})_x\,(L_{Zr})_y\,(L_{Nb})_z$$

इत्यादि ।

माध्यमिक क्लोराइड व्युत्पन्नों जैसे,



$$MCl_{n-x-y-z}\,(L_{AL})_x\,(L_{Zr})_y\,(L_{Nb})_z$$

का पृथक्ककरण किया गया, कुछ एक को X-किरण क्रिस्टलोग्राफी[42,43] विधि द्वारा अभिलक्षित किया गया है ।

इसे पुनः KOR या Kac ac जैसे अभिकर्मकों के साथ अभिक्रिया करने पर इस प्रकार का उत्पाद, $M\,X_{n-y-y-z}\,(L_{AL})_x\,(L_{Zr})_y\,(L_{Nb})_z$ (जहाँ X, या तो एल्काक्सी समूह जैसा लिगैंड (OEt) (OPr^i) या (OBu^t), अथवा β-डाइकिटोनेट, जैसे, लिगैंड (acac) ऐसिटाइल ऐसीटोनेट) देता है ।

सॉल-जेल प्रक्रम के पूर्वगामी-विषम धात्विक एल्काक्साइड : (Heterometal Alkoxides as Precussors in the Sol-Gel Process)

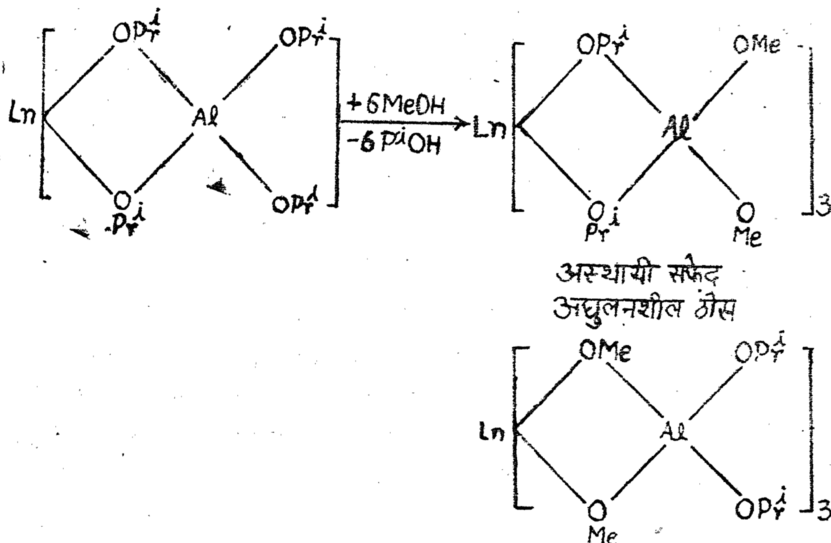
मेहरोत्रा[19] से पहले सन् 1971 में डिशलिक[17] ने विभिन्न धात्विक एल्काक्साइडों से प्राप्त काँच की अति समांगी प्रकृति से अनुमान लगाया था कि इस उपलब्धि को कार्बनिक विलायक में एल्काक्साइडों के मिश्रण की भौतिक मिलावट से पूर्णरूपेण नहीं समझा जा सका वरन् इससे नये रासायनिक बन्ध बनने का संकेत मिलता है ।

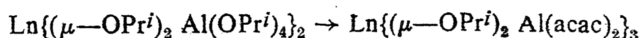
स्पष्ट है कि अनेक धातुओं के एल्काक्साइडों के मिश्रण से प्राप्त सेरेमिक द्रव्य उनके पारस्परिक रासायनिक बन्धनों के कारण समांगी रूप में पाये जाते हैं । यदि इनके स्थान पर विषमधात्विक एल्काक्साइड का प्रयोग किया जाये तो और भी अधिक समांगी सेरेमिक द्रव्य प्राप्त हो सकेंगे ।

सर्वप्रथम, एक द्विधात्विक एल्काक्साइड $[Mg\{Al(OR)_4\}_2]$[25] के प्रयोग से $Mg\,Al_2\,O_4$ सेरेमिक बनाया गया । इससे स्पष्ट है कि जेल बनने के बाद भी $Mg\{Al(OR)_4\}_2$ की प्रारम्भिक संरचना बनी हुई है ।

द्विसंयोजी धातुओं (जैसे Mg, Ca, Sr, Ba[25], Mn(II)[50], Co(II)[53], Ni(II)[58] और Cu(II)[59]) के टेट्राआइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेटों की घुलनशीलता दर्शाती थी कि ये विलयन में टूटते नहीं और परिणामस्वरूप अघुलनशील आइसोप्रोपाक्साइड की लब्धि नहीं होती है । आगे चलकर यह निश्चित हो गया था कि $Al(OPr^i)_3$ अत्यधिक ताप पर भी अपरिवर्तित रहकर, वाष्पीकरण के फलस्वरूप, अपनी मात्रात्मक लब्धि में प्राप्त किया जा सकता है जो यह दर्शाता है कि द्विधात्विक एल्काक्साइड में अपने अवयवों में टूटने की प्रवृत्ति नहीं होती । बहुधा किसी भी एक सम टेट्रा आइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेट की X-किरण क्रिस्टलीय संरचना उपलब्ध नहीं हैं, फिर भी $Pr\{Al(OPr^i)_4\}_2\,(Pr^iOH\,(\mu\text{—}(Cl)_2$[43] में

टेट्राआइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेट इकाई को स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है। भौतिक-रसायन अध्ययनों से $Ln\{Al(OPr^i)_4\}_3$ और $Al\{Al(OPr^i)_4\}_3$ की एक जैसी ही संरचना का प्रमाण पहले ही दिया जा चुका है। $Ln\{Al(OPr^i)_4\}_3$ में $\{Al(OPr^i)_4\}_3$ इकाइयों का निश्चयन, मेथेनॉल और ऐसिटाइल ऐसीटीन (acaco) के साथ अभिक्रिया करने से, किया गया :





$Ln\{(\mu\text{—}OPr^i)_2\ Al(OPr^i)_4\}_2 \rightarrow Ln\{(\mu\text{—}OPr^i)_2\ Al(acac)_2\}_3$
घुलनशील, वाष्पशील, एकलक

मेटेरियल शोध संगोष्ठी (अप्रैल, 1988) की कान्फ्रेन्स में प्रो० मेहरोत्रा[19] ने S-G प्रक्रम के सशक्त अनुप्रयोग (Potential applications) द्वारा निम्नलिखित पदार्थों के बनने पर बल डाला था : (क) $M\{Nb(OR)_6\}$ से $MNbO_3$ का बनना (जहाँ M=एल्कली धातु)[60], (ख) $Ln\{Al(OPr^i)_4\}_3$ से $Ln\,Al_3\,A_6$, (ग) $[(Pr^iO)_2\ Zr\ \{Al(OPr^i)_4\}_2]$[32] से $Zn\,Al_2\,O_5$, (घ) $Ba\{Ti(OR)_6\}$[61,62] से $Ba\,Ti\,O_3$ का बनना। इन सबसे अलग $Li\,Nb\,(OEt)_6$ से क्रिस्टलीय फेरोइलेक्ट्रिक और पाइजोइलेक्ट्रिक $Li\,Nb\,O_3$ तन्तुओं के निर्माण का भी निश्चयन किया गया[63]। इसी तरह से $Li\,Nb\,(OEt)_6$ और $Li\,Ta\,(OEt)_6$ (आवश्यक अनुपात में) के मिश्रण का जलअपघटन द्वारा क्रिस्टलीय $Li\,Nb\,Ta_{1+x}\,O_3\,(O_x)$ फिल्मों का बनना भी सम्भव हुआ है। एक अन्य आवश्यक फेरोइलेक्ट्रिक पदार्थ $Pb\,(Mg\ 1/3\ Nb\ 2/3)\ O_3$ को द्विधात्विक एल्कॉक्साइड $Mg\{Nb(OEt)_6\}_2$[61] व $Pb\,(OBu^t)_2$[62] के साथ, सह जलअपघटन (co-hydrolysis) के उपरान्त, S-G प्रक्रम से एरोजेल (aerogel)[67] के रूप में बनाया गया है।

मैकेंजी एवं उनके सहयोगियों[69] ने $KNb\,(OEt)_6$ से $KNb\,O_3$ सेरेमिक डिस्क को बनाया जो उच्च समांगता (homogeneity) प्रदान करती क्योंकि एल्कॉक्साइडों के मिश्रण (KOEt व Nb (OEt) को पूर्वगामी जैसे प्रयोग में लेने के बजाय द्विधात्विक एल्कॉक्साइड को प्रयोग में लाया गया है।

अत्यावश्यक विकसित अतिचालक पदार्थों, जैसे, $Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-x}$ के साथ ही लगातार प्रयत्न, द्विसंयोजी धातुयें जैसे Ba व Cu के घुलनशील एल्काक्साइडों का इस दिशा में प्रयोग किया गया है। इस दिशा में दन्तुर बहु एल्काक्सोमेटेलेट लिगंडों के प्रयोग की सफलता के साथ ही साधारण कीलेटी-कारक एल्कोहॉलों, जैसे, मिथाक्सी इथेनॉल $CH_3 OC_2 H_4 OH$[70] या इथेनॉल डाई मिथाइल एमीन, $Me_2 N C_2 H_4 OH$ को भी प्रयोग में लाया गया है। बाद में इन घुलनशील एल्काक्सी व्युत्पन्नों के प्रयोग[71] द्वारा $Y Ba_2 Cu_3 O_{7-x}$ फिल्म को बनाया गया। अन्य द्विधात्विक एल्कासाइड जो कि अति-चालक फिल्म। $Ba_2 Cu_2 (OR)_4 (acac)_4$ 2 HOR ($R{=}CH_3 CH_2 O CH_3$)[72] के बनने में प्रयुक्त किये गये हैं सांका[73] द्वारा S-G प्रक्रमों व अति चालकों पर समीक्षा लेख दिया जा चुका है।

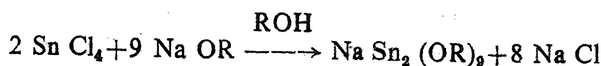
भावी पूर्वेक्षण और आगे अन्वेषण की आवश्यकता (Future Prospects and need for further investigation)

असामान्य स्थायित्व (Extra ordinary stability) (प्राय: अपघटक एल्काक्साइड इकाइयों से भी ज्यादा, जैसे, इट्रियम ट्रिस टेट्राआइसोप्रोपाक्सी एल्यूमिनेट)[30] और अधिक विलेयता के साथ-साथ बाष्पशीलता गुण होने के कारण विषम धात्विक एल्काक्साइड अपने आपको एक आकर्षक पूर्वगामी[19] सिद्ध करते हैं। ये विषम धात्विक एल्काक्साइड- S-G प्रक्रम के साथ ही साथ MOCVD प्रक्रमों और Single Source Precursors [74] की खोज में भी प्रकाश किरण के रूप में सिद्ध हुए हैं।

सौभाग्यवश, प्रारम्भिक संदेहात्मक स्थिति का प्रादुर्भाव उनके नयापन (novelty) और असम्भावित गुणों[15,16] के कारण हुआ जिसने हाल के कुछ समीक्षाओं[21,22] से दूर रखा है। इन विषम-बिन्दुओं पर और अधिक गहन खोजों (Penetrating investigations) की आवश्यकता रही हैं, जिसमें न केवल उनके भौतिक-रसायन गुणों[75] को ही बल्कि S-G प्रक्रमों में उनके अनुप्रयोगों को भी दर्शाया गया है। इनके क्रियाशीलता की क्रियाविधि की पूर्णरूपेण खोज का प्रारम्भ[62] प्रोफेसर मेहरोत्रा के शोध स्कूल में किया गया है। अवक्षेपण एवं संघनन की क्रिया एकसाथ सम्पन्न होने के कारण जलअपघटन का प्रक्रम कुछ जटिल हो जाता है। अत: $[Mg\{Al(OPr^i)_4\}_2]$[76] और $[Ca\{Al(OPr^i)_4\}_2]$[77] स्पीशीजो की मिथेनोलिसिस की क्रिया-विधि की खोज की गई है जो पुनः मूलभूत वैसी ही चतुष्फलकीय संरचना दर्शाते हैं जैसा कि $Al(OPr^i)_4$ में है। पुनरावृत्ति के बारे में इसी प्रकार का निष्कर्ष द्विधात्विक[78] एल्काक्साइड, $[Li\{Ti(OPr^i)_5\}_2]$[79] और $[Ba\{Zr_2(OPr^i)_9\}_2]$[80] से जाल अपघटन के प्रथम चरण में क्रमशः $[Li\{TiO(OPr^i)_3\}_4]$ और $[Ba\{Zr_4(OH)(OPr^i)_2\}_4]$ व $Ba Zr_4 (OH) OPr^i)_{17}$ के बनने की पुष्टि होती है साथ ही मूल संरचनात्मक आकृति में भी कोई परिवर्तन नहीं होता है।

रसायनज्ञों द्वारा अत्यधिक पूर्णरूपेण भौतिक रसायन अध्ययन की आवश्यकता के साथ-साथ एल्काक्साइड रसायन अत्यधिक सुविधाजनक पूर्वगामी का चुनाव प्रदान कर सका है। उदाहरण के लिये, टिन एल्काक्साइड का प्रयोग पूर्वगामी के रूप में नहीं किया गया था क्योंकि व्यापारिक स्रोत से उपलब्ध नहीं हैं और उनके संश्लेषण की विधि[1] कठिन है। जैसा कि, द्विधात्विक एल्काक्साइड, $Na Sa_2 (OR)_9$

का संश्लेषण माध्यमिक स्पीशीज के रूप में होता है और उसे बिल्कुल आसानी से एक ही पद के प्रक्रम से प्राप्त किया जा सकता है :

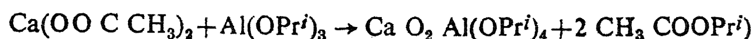


$$2\ Sn\ Cl_4 + 9\ Na\ OR \xrightarrow{ROH} Na\ Sn_2\ (OR)_9 + 8\ Na\ Cl$$

इस सुझाव को मेहरोत्रा[81] ने दिया और यह भी प्रदर्शित किया कि सरल टिन एल्काक्साइडों की तुलना में $Na\{Sn_2(OR)_9\}$ एल्काक्साइड अधिक सुगमता से प्राप्त किया जा सकता है। उन्होंने सुझाव दिया कि $Sn(OR)_4$ की जगह $Na\ Sn_2(OR)_9$ क पूर्वगामी यौगिकों के रूप में उपयोग बहुत ही आकर्षक प्रतीत होता है।

दूसरी ओर एल्काक्साइडों की व्यापारिक उपलब्धता पर निर्भर और उनके प्रयोग में कठिनाई क्योंकि, अत्यधिक क्रियाशीलता (जल अपघटन के लिये) यहाँ तक कि वातावरण नमी से भ । थामस[82 द्वारा सुझाव दिया गया कि शुद्ध एल्कावसाइड के स्थान पर अत्यल्प जलयोजन योग्य आक्साइड-एल्काक्साइडों का प्रयोग उचित है। इसी दृष्टिकोण को ध्यान को ध्यान में रखकर, हाल ही में $[Ca\{(O)\ Al(OPr^i)_3\}_2$ के संश्लेषण व रसायन की खोज की गयी।

आक्साइड-एल्काक्साइड को मात्रात्मक लब्धि में निम्नलिखित साधारण अभिक्रिया द्वारा बनाया जा सकता है :



$$Ca(OO\ C\ CH_3)_2 + Al(OPr^i)_3 \rightarrow Ca\ O_2\ Al(OPr^i)_4 + 2\ CH_3\ COOPr^i)$$

जल द्वारा, जलअपघटन अभिक्रिया के अध्ययनों के अलावा अन्य प्रोटिक कारक के साथ पूर्णरूपेण खोजों को निम्नलिखित सामान्य समीकरण द्वारा दर्शाया जा सकता है :



$$Ca\ O_2\ Al_2\ (OPr^i)_4 + 3\ ROH \rightarrow Ca\ O_2\ Al_2\ (OPr^i)\ (OR)_3 + 3\ Pr^i\ OH$$

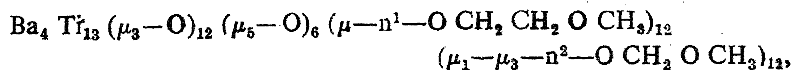
(जहाँ $R = PhO,\ CH_3\ COO$ या acac)

यह रोचक है कि $Ca\ O_2\ Al_2\ (OPr^i)_4$ में चार आइसोप्रोपाक्सी समूहों में से तीन समूहों को ही प्रतिस्थापित किया जा सकता है (विभिन्न अभिकर्मकों द्वारा प्रायः मुक्त आइसोप्रोपेनॉल कोबेन्जीन के साथ ऐ जियोट्राय (बेन्जीन के साथ) के रूप में लगातार प्रभाजन से बाहर निकाल दिया।

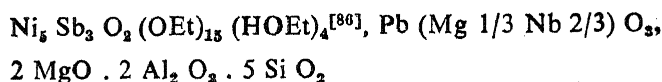
इसी प्रकार का अध्ययन[62] $Ba\ O_2\ Al_2\ (OPr^i)_4$ और $Pb\ O_2\ Al_3\ (OPr^i)_4$ के साथ किया गया है। कुछ और विषम धात्विक आक्साइड-एल्काक्साइडों के पृथक्करण की सूचना मिली जो निम्न है :



$Pb_6\ Nb_4\ (\mu-O)_4\ (\mu_3—OEt)_4\ (\mu_2—OEt)_{12}\ (OEt)_8$[84],



$Ba_4\ Ti_{13}\ (\mu_3-O)_{12}\ (\mu_5-O)_6\ (\mu—n^1—O\ CH_2\ CH_2\ O\ CH_3)_{12}$
$(\mu_1—\mu_3—n^2—O\ CH_2\ O\ CH_3)_{12}$,



$Ni_5\,Sb_3\,O_2\,(OEt)_{15}\,(HOEt)_4$[86], Pb (Mg 1/3 Nb 2/3) O_3,

2 MgO . 2 $Al_2\,O_3$. 5 Si O_2

सीधे जल अपघटन के दूसरी तरफ, गोयल व अन्य ने हाल ही में एक नवीनतम अजलीय तरीके का सुझाव दिया जिसमें आक्साइड-एल्काक्साइडों के बनाने के लिये ऐसीटोन का प्रयोग संघनन कारक के रूप में दिया गया है।

निर्देश

1. ब्रेडले, डी०सी०, मेहरोत्रा, आर० सी० तथा गौड़, डी० पी०, *Metal Alkoxides*, Academic Press : London 1978.
2. ब्रैडले, डी० सी०, मेहरोत्रा, आर० सी तथा वार्डला, डब्ल्यू०, *J. Chem. Soc.* 2027, 4204, 5020 (1952), 1534 (1953).
3. मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Ind. Chem. Soc.*, 1953, **30**, 585, 1954, **31**, 85, *J. Am. Chem. Soc.* 1954, **74**, 2266.
4. दुरोवा, एन० यायाo एवं अन्य, *J. Inorg. Nucl. Chem.*, 1979, **41, 5**.
5. मेहरोत्रा, आर० सी०, बटवारा, जे० एम० और कपूर, पी० एम०, *Coord. Chem. Rev.* 1980, **31**, 67.
6. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Structure and Bonding*, 1992, 77.
7. मेहरोत्रा, आर० सी०, शार्पे, ए० जी० तथा एमेलियस, एच० जे० सम्पादक, Advances in Inorganic Chemistry and Radio Chemistry, Academic Press, New York, 1983, Vol. 27, p. 269.
8. मेहरोत्रा, आर० सी० और राय, ए० के०, *Polyhedron Report* 1967, (1991), **10**, 38.
9. मेहरोत्रा, आर० सी०, सिंह, ए० और त्रिपाठी, यू० एम०, *Chemical Rev.* 1991, **91**, 1287.
10. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Nat. Acad. Sc. Letters*, 1993, **16**, 77.
11. मीरवाइन, एच० तथा बरसीन, टी० *Ann.* 1916, **476**, 113.
12. बार्टल, डब्ल्यू० जी० तथा वार्डला, डब्ल्यू०, *J. Chem. Soc.* 1958, **421**.
13. मेहरोत्रा, आर० सी० और मेहरोत्रा, ए०, *Inorg. Chim. Acta. Rev.*, 1271, 5. 127.
14. मेहरोत्रा, आर० सी० और अग्रवाल, एम०, *Polyhedron*, 1985, **4, 84g**, 1141.
15. दुबे, आर० के०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Organometal, Chem.* 1988, **341**, 569.

16. दुबे, आर० के०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Recl. Trav. Chim. Pays-Bas* (वा न० डरकर्क इश्यु) 1988, **107**, 237.

17. हिशलिक, एच०, *Angew, Chemic* (Int. Edl 1971 **10**, 363.

18. मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Non-Cryst. Solids*, **100**, 1 (1988).

19. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* 1988, **121**, 81.

20. मेहरोत्रा, आर० सी०, अगरतर, एम० ए० सम्पादक, *in Sol-Gel Science and Technology* (World Sc., Singa Proc., 1989) p. 24.

21. ब्रैडले, डी० सी०, *Chem. Rev.*, 1989, **89**, 1217.

22. कॉल्टन, के० जी० और फैल्जमग्रेफ, एल० जी०, *Chem. Rev.*, 1990, **90**, 969.

23. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Chem. tracts*, 1990, **2**, 389.

24. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Ind. J. Chem.*, 1992, **31A**, 492.

25. कपूर, पी० एन० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Corcel. Chem. Rev.*, 1974, **14**, 1.

26. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Proc. Ind. Nat. Sc. Acad.*, 1976, **42**.

27. ईवान्स, डब्ल्यू० जे० एवं अन्य, *Inorg. Chem.* 1989, **28**, 4027.

28. कॉटन, एफ० ए०, मैरियर, डी० ओ० और शेवोट्जर, डब्ल्यू०, *Inorg. Chem.*, 1984, **25**, 4211.

29. पोन्सेलेर, ओ०, सारटेन, डब्ल्यू० जे० एवं अन्य, *Inorg. Chem.*, 1989, **28**, 263.

30. मेहरोत्रा, आर० सी०, *Chemtracts*, 1990, **2**, 143.

31. रीश, जे० जी० और फैल्जग्राफ, एल० जी०, *Bull. Soc. Chim. Franoe*, 1868, 2401, 43-48.

32. हैहरोत्रा, आर० सी०, जैन, आर०, राय, ए० के०, *J. Inorg. Chem.* (China), 1987, **3**, 96.

33. गोविल, एस०, कपूर, पी० एन० और मेहरोत्रा, आर० सी, *Inorg. Chem. Acta*. 1975, **15**, 43.

34. दुबे, आर० के०, सिंह, ए०, मेहरोत्रा, आर० सी०, *Inorg. Chim. Acta*, 1986, **118**, 151.

35. जैन, आर०, राय, ए० के०, मेहरोत्रा, आर० सी०, Z. Natur fors, 1985, **40b**, 1371.

36. मेहरोत्रा, आर० सी०, अग्रवाल, एम० और शर्मा, सी० के०, *Synth, React Inorg. Met. Org. Chem.* 1984. **13**, 571.

37. दुबे, आर० के०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Inorg. Chim. Acta*, 1988, **143**, 169.

38. शाह, ए०, सिंह, ए०, और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Ind. J. Chem.* 1981, **27A**, 372.

39. छीपा, आर० सी०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Synth. React. Inorg. Met-Org. Chem.* 1990, **20**, 989.

40. त्रिपाठी, यू० एम०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Polyhedran*, 1991, **10**, 949.

41. ब्रैडले, डी० सी०, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 199*, A 3330, 167.

42. सोगानी, एस, बोरा, आर०, नाटेमेयर, एम०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Chem. Soc. Chem Commun*, 1991, 738.

43. त्रिपाठी, यू० एम०, सिंह, ए० मेहरोत्रा, आर० सी०, गोयल, एस० सी०, चियांग, एम० वाई० और बुहरो, डब्ल्यू० ई०, *J. Chem. Soc. Chem. Commun.* 1992, 152.

44. त्रिपाठी, यू० एम०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Polyhedron*, 1991, **10**, 949.

45. त्रिपाठी, यू० एम०, Ph. D. Thesis, *University of Rajasthan, Jaipur*, (1992).

46. सोगानी, एस०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Main Group Metal Caem.* 1992, **15**, 197, *Ind. J, Chem.*, *Ind. J. Chem.* 1993, **32A**, 345.

47. सोगानी, एस०, *Ph. D, Thesis*, University of Rajasthan, Jaipur, 1992.

48. माथुर, एस०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Polyhedron*, 1992, **11**, 341, 1993, **12**, 1073, *Ind. J. Chem.*, 1993, **32A**, 310 और *New. I. Chem.*, (in Press) 1994.

49- माथुर, एस०, Ph. D. Thesis, University of Rajasthan, Jaipur, 1992.

50. दुबे, आर० के०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Ind. J. Chem.*, 1993, **31A**, 156.

51. गुप्ता, आर०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी, *Ind. J. Chem.*, 1991, **30A**, 592.

52. गुप्ता, आर०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *New J. Chem.*, 1991, **15**, 665, *Ind. J. Chem.*, 1993, **32A**, 310.

53. गर्ग, जी०, दुबे, आर० के०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, New J. Chem. 1991, **15**, 665, *Ind. J. Chem.*, 1993, **32A**, 310.

54. गर्ग, जी०, दुबे, आर० के०, सिंह, अ० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Polyhedlon*, 1991, **10**, 1733.

55. छीपा, आर० सी०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Synth. React Inorg. Met-Org. Chem*. 1990, **20**, 989, *Ind. J. Chem*., 1991, **30A**, 1024.

56. त्रिपाठी, यू० एम०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Polyhedron*, 1993, **12**, 1947.

57. गर्ग, जी०, सिंह, ए० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Polyhedron*, 1993, **12**, 1947.

58. मेहरोत्रा, आर० सी०, और सिंह, जे० वी०, *Cand. J. Chem*., 1984, **62**, 1003.

59. मेहरोत्रा, आर० सी० और सिंह, जे० वी०, *Z. Anorg. Allgem., Chem*., 1984, **522**, 211.

60. मेहरोत्रा, आर० सी०, अग्रवाल, एम० एम० और कपूर, पी० एन० *J. Chem. Soc*. 1968, 1203.

61. गोंविल, एस०, कपूर, पी० एन० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Inorg. Nncl. Chem*., 1976, **38**, 172.

62. राय, जे०, Ph. D. Thesis, University of Rajasthan, Jaipur, 1992.

63. हिरानों, एस, हायाशी, टी०, नोसाकी, के० और काटी, के०, *J. Am. Ceram. Soc*. 1989, **72**, 707.

64. हिरानों, एस० और कॉटो, के०, *Bull. Chem, Soc. Jpn*., 1989, **62**, 429, *Solid State Ionics*, 1989, **32**, 765.

65. चैपट, एफ०, व्वायलाट, जे०, लेजयेने, एम०, पैपियरनिक, आर० और हबर्ट-पैल्जग्रेफ, *J. Am. Ceram. Soc*. 1989, **72**, 1335.

66. पैपियर्निक, आर० और अन्य, *Am. Chem. Soc*. Meeting, Los Angeler 1988, Paper No. Inorg. 230.

67. मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Non-Cryst. Solids*. 1992, **145**, 1.

68. मेहरोत्रा, आर० सी०, अग्रवाल, एम० एम० और कपूर, पी० एन०, *J. Chem. Soc. (A)*, 1968, 2673.

69. नैजेरी, ए०, कुआंग, ए० एक्स० और मैकेन्जी, जे० डी०, *J. Mat. Sc*. 1990, **25**, 3333.

70. गोयल, एस० सी०, एवं अन्य, *Inorg. Chem*., 1989, **28**, 1619.

71. कार्डस, जी०, *J. Non-Cryst. Solids*, 1990, **121**, 436. कात्याभा, एस० एवं अन्य, *J. Mat. Chem*., 1991, **1**, 1031, J. Appl. Phys. 1991, 71, 2995.

72. साउर, एन० एन०, ग्रेसिया, ई०, सल्जर, के० वी०, रियन, आर० आर० और मार्टेन, जे० ए०, J. Am. Chem. Soc., 1990, **112**, 1524.

73. साका, एस०, J. Non-Cryst. Solids, 1990, **121**, 417.

74. काऊली, ए० एच० और जोन्स, आर० ए०, *Angrw Chem.* (Int. Ed.) 1992, **28**, 1208.

75. होन्च, एल० एल० और वेस्ट, जे० के० *Chem. Rev.*, 1990, **90**, 33.

76. राय, जे० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *J. Non-Cryst. Solids*, 1993, **152**, 118.

77. राय, जे० और मेहरोत्रा, आर० सी०, *Main Group Metal Chem.*, 1992, **15**, 209.

78. कुलमान, आर० एवं अन्य, *Inorg. Chem.*, 1993, **32**, 1272.

79. हैम्पडेन-स्मिथ, एम० जे०, विलियम्स, डी० एस० और रीवगोल्ड, ए० एल०, *Inorg, Chem.*, 1990, **29**, 4076.

80. वारस्भा, बी० ए०, हफमान, जे० सी०, स्ट्रीव, डब्ल्यू० ई० और कॉल्टन, के० जी, 1991, **30**, 3068, R. Mehrotra, Chemtracts, 1993, **5**.

81. मेहरोत्रा, आर० सी०, *in Chemistry and Technology of Silicon and Tin ed.* कुमारदाश, वी० जी० और गिलेन, एम० (Oxford Univ. Press, 1991) p. p. 93-109.

82. थामस, आई० एम०, In *Sol-Gel Technology for Thin films*, Fibres, Preforms, Electronics and Specially Shapes, ed. क्लिन (नोयेस, N. Tersey, 1988) P. 7.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 38, No. 2, 1995

साह्हीवाल गाय के आर्थिक विशेषकों की वंशागति तथा उनका दुग्ध-उत्पादन के साथ सम्बन्ध

ए० के० मिश्र

पशु विज्ञान विभाग, चित्रकूट ग्रामोदय विश्वविद्यालय, चित्रकूट (म० प्र०)

तथा

आर० बी० प्रसाद

पशु प्रजनन विभाग, गोविन्द बल्लभ पन्त कृषि विश्वविद्यालय, पन्त नगर, नैनीताल (उ० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 19, 1995]

सारांश

साह्हीवाल नस्ल की 159 गायों के प्रथम ब्यांत से सम्बन्धित 12 विशेषकों की वंशागति तथा उनका दुग्ध उत्पादन के साथ सह-सम्बन्ध का अध्ययन किया गया। इसमें यह पाया गया कि उत्पादन से सम्बन्धित विशेषकों का वंशागति मान 0.19 ± 0.60 से 0.28 ∓ 0.06 के बीच है, जबकि गाय की जनन क्षमता से सम्बन्धित अधिकतर विशेषकों का वंशागति मान 0.02 ± 10.03 से 0.18 ± 0.05 के बीच है। आनुवंशकीय एवं बाह्यस्तरीय स्तर पर उत्पादन तथा उत्पादन क्षमता से सम्बन्धित सभी विशेषकों का दुग्ध उत्पादन से सार्थक धनात्मक सह-सम्बन्ध पाया गया, जो यह दर्शाता है कि गोपशुओं के उन्नयन के लिए उन विशेषकों के आधार पर किया गया चयन प्रभावशाली होगा।

Abstract

Relation between economic characters of inheritance and milk production of Sahiwal cows. *By* A. K. Misra and R. B. Prasad, Chitrakoot Gramodaya Viswavidyalaya, Chitrakoot (M. P.).

Correlation between the characters of inheritance and milk-production of 159 cows of Sahiwal breed have been determined.

दुग्ध उत्पादन कई जीनों से प्रभावित होने वाला विशेषक है, तथा यह वातावरण से 75% तक प्रभावित होता है। हम प्रत्येक विशेषक से जिस लाभ की आशा रखते हैं उसके अलावा वंशागतियों तथा परस्पर सम्बन्धों की जानकारी भी आवश्यक होती है, ताकि यह निर्धारित किया जा सके कि पशु उन्नयन योजना में इन विशेषकों का क्या योगदान है।

प्रयोगात्मक

पशुधन अनुसंधान केन्द्र, गोविन्द वल्लभ पन्त कृषि विश्वविद्यालय पन्तनगर में पाली गयी ऐसी 159 साहीवाल गायों का विवरण, जिन्होंने अपना प्रथम ब्यांत वर्ष 1961 से 1988 के मध्य पूरा कर लिया था, वर्तमान अध्ययन हेतु लिया गया है। इस अध्ययन में 12 विशेषकों का अध्ययन किया गया जो क्रमश: प्रथम ब्यांत में दुग्ध उत्पादन, दुग्ध-स्रवण काल, शुष्क काल, अधिकतम दुग्ध उत्पादन, पुनगर्भाधान काल, गर्भकाल, ब्यांतांतर तथा दुग्ध उत्पादन क्षमता प्रति किलो ग्राम शरीर भार, प्रति ब्यांतांतर काल प्रति उत्पादन दिन थे।

गैर आनुवंशिकी कारकों के प्रभावों का अध्ययन करने हेतु लीस्ट-स्क्वेयर गणना[1] की गई जिसका माडल निम्न था—

म र ल व=औ+अ य+ब ल+सर ल व

जहाँ

औ=सम्पूर्ण औसत

अ य=य वर्ष का प्रभाव जह .य=1, 2, ˙ ˙ , 28

ब ल=ल मौसम का प्रभाव जहाँ ल=1, 2, 3, 4,

स र ल व=क्रम सहित त्रुटि

म र ल व=य वर्ष के ल मौसम में र गायों का आँकड़ा।

वंशागति का अध्ययन करने हेतु वंशागति[3] तथा सह-सम्बन्धों का अध्ययन करने हेतु, आनुवांशिकीय सह-सम्बन्ध[2] तथा बाह्रूपीय सह-सम्बन्ध[4] की गणना की गई।

परिणाम तथा विवेचना

सभी विशेषकों का औसत मान मानक त्रुटि के साथ सारणी 1 में दिया गया है।

पशुओं के विशेषकों की वंशागति लक्षित दृश्य रूपी प्रसरण का एक भाग होती है। सारणी 1 के अवलोकन से स्पष्ट है कि प्रथम ब्यांत पर उम्र एवं भार, प्रथम ब्यांत में दुग्ध उत्पादन, अधिकतम दुग्ध उत्पादन तथा दुग्ध उत्पादन क्षमता प्रति उत्पादन दिन का वंशागति मान 0.19±0.06 से 0.28±0.06 के मध्य है, जो यह दर्शाता है कि इन विशेषकों का अनुवांशिक आधार अच्छा है, अत: यदि हम गायों का चयन इन गुणों के आधार पर करें तो चयन फलोत्पादक होगा। प्रथम ब्यांत में

दुग्ध उत्पादन, अधिकतम दुग्ध उत्पादन तथा दुग्ध उत्पादन क्षमता प्रति उत्पादन दिन का वंशागति मान लगभग बराबर है, जो यह दर्शाता है कि ये तीनों विशेषक, जीनों के एक ही समूह द्वारा प्रभावित होते हैं।

शुष्ककाल, पुनःगर्भाधान काल, गर्भकाल, ब्यांतांतर, दुग्ध उत्पादन क्षमता प्रति कि० ग्रा० शरीर भार प्रति ब्यांतांतर काल, जो कि पशुओं की जनन क्षमता से सम्बन्ध रखते हैं, इन सब का वंशागति मान 0.02 ± 0.03 से 0.18 के मध्य है, जिससे यह पता चलता है कि इन विशेषकों का आनुवंशिक आधार बहुत ही कम है तथा ये वातावरण से अधिक प्रभावित होते हैं, अतः इन विशेषकों के आधार पर किया गया चयन प्रभावशाली नहीं होगा। इन विशेषकों में सुधार करने के लिए हमें पशुओं के खान-पान तथा रहन-सहन की व्यवस्था का उचित प्रबन्ध करना होगा।

सारणी 1 में दर्शाये गये आनुवंशकी एवं बाह्यरूपी सह-सम्बन्ध के अध्ययन से यह स्पष्ट है कि प्रथम ब्यांत पर उम्र एवं भार, प्रथम ब्यांत में अधिकतम दुग्ध उत्पादन, तथा दुग्ध-उत्पादन क्षमता से सम्बन्धित विशेषकों का दुग्ध उत्पादन से धनात्मक सह-सम्बन्ध है, जो यह निर्देशित करता है कि दुग्ध उत्पादन हेतु चयन के लिए उपर्युक्त विशेषकों का प्रयोग किया जा सकता है। पुनः गर्भाधान काल तथा गर्भकाल का दुग्ध उत्पादन से ऋणात्मक सम्बन्ध पाया गया जो कि सार्थक नहीं है, जो यह संकेत करता है कि ये विशेषक उत्पादन से ज्यादा सम्बन्धित नहीं हैं। ब्यांतांतर का दुग्ध उत्पादन मे सार्थक ऋणात्मक सम्बन्ध पाया गया।

इस अध्ययन से स्पष्ट है कि उत्पादन से सम्बन्धित विशेषकों का वंशागति मान मध्यम से कम है। आनुवंशकीय एवं बाह्यरूपीय स्तर पर पशु का उत्पादन तथा उत्पादन क्षमता से सम्बन्धित सभी विशेषकों का दुग्ध उत्पादन से धनात्मक सह-सम्बन्ध है, अतः हम पशुओं का चयन इन विशेषकों के आधार पर कर सकते हैं।

सारणी 1

आर्थिक विशेषकों का वंशागतित्व-मान तथा उनका दुग्ध-उत्पादन के साथ आनुवंशकीय एवं बाह्यरूपी सह-सम्बन्ध

विशेषक	औसत मान	वंशागति मान	दुग्ध-उत्पादन के साथ सह-सम्बन्ध	
			आनुवंशकीय	बाह्यरूपीय
1. प्रथम ब्यांत पर उम्र (दिन में)	1264.10	0.19	0.58**	0.02
	(18.73)	(0.06)	(0.07)	(0.07)
2. प्रथम ब्यांत में भार (किग्रा)	319.0	0.23	0.66**	0.00
	(3.0)	(0.06)	(0.01)	(0.00)

3. प्रथम ब्यांत में दुग्ध उत्पादन (किग्रा में)	1877.11 (33.44)	0.28 (0.06)	—	—
4. दुग्ध स्रवण काल (दिनों में)	282.29 (5.08)	0.15 (0.05)	—0.18* (0.04)	0.00 (0.00)
5. शुष्क-काल (दिन में)	137.54 (5.65)	0.02 (0.03)	0.36** (0.00)	—0.13 (0.07)
6. अधिकतम दुग्ध उत्पादन (किग्रा में)	9.05 (0.18)	0.26 (0.06)	0.29** (0.04)	0.39** (0.06)
7 पुनःगर्भाधान काल (दिनों में)	145.85 (5.23)	0.06 (0.04)	—0.04 (0.00)	—0.12 (0.07)
8. गर्भकाल (दिनों में)	274.67 (0.21)	0.12 (0.05)	—0.06 (0.06)	0.01 (0.06)
9. ब्यांतांतर (दिनों में)	419.76 (5.19)	0.11 (0.07)	—0.20** (0.01)	—0.15 (0.07)
10. दुग्ध उत्पादन क्षमता—				
(क) प्रति किग्रा० शरीर भार	5.61 (0.18)	0.18 (0.05)	0.01 (0.00)	0.42** (0.06)
(ख) प्रति ब्यांतांतर काल (किग्रा)	4.18 (0.10)	0.06 (0.04)	0.04 (0.04)	0.33** (0.07)
(ग) प्रति उत्पादन दिन (किग्रा)	6.50 (0.11)	0.25 (0.06)	0.00 (0.00)	0.43** (0.06)

(·) कोष्ठक के अन्दर दी गई संख्याएं मानक त्रुटि को दर्शाती हैं।

*. सार्थकता, 5 प्रतिशत स्तर पर।

**. सार्थकता, 1 प्रतिशत स्तर पर।

निर्देश

1. हार्वे, डब्लू-आर० Least-square analysis of data with unequal sub-class numbers ARS-H-4, Agriculture Research Services, U. S. Department of Agriculture.

2. हैजेल, एल० एन०, बेकर, एम० आई० तथा रीनमिटर सी० एफ०, J. Anim. Sci., 1943, **2**, 118-128.

3. हैजेल, एल० एन० तथा टेरिल, सी० ई०, J. Anim. Sci. 1945, **4**, 347-358.

4. सर्ले, एस० आर०, Biometrics. 1961, **17**, 474-480.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 2, 1995

पूज्य स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

डा० शिवगोपाल मिश्र

18 जनवरी 1995 को अमेठी में पूज्य स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती (डा० सत्य प्रकाश) के निधन के साथ ही उनकी लम्बी बीमारी की ही समाप्ति नहीं हुई अपितु एक तरह से हिन्दी में विज्ञान लेखन के 'सत्य प्रकाश-युग' का अन्त हो गया। वे नब्बे वर्ष के थे।

जब हम 90 वर्ष पूर्व की विश्व परिस्थिति पर विचार करते हैं तो विज्ञान के क्षेत्र में मैक्स प्लांक, आइन्स्टीन, रैमसे, क्यूरी जैसे वैज्ञानिकों की संकल्पनाओं का युग, देश में महात्मा गांधी, टैगोर तथा महर्षि दयानन्द की विचार धाराओं का युग, और स्वदेशी आन्दोलन का दौर पाते हैं। सचमुच ही अत्यन्त रोमांचकारी वर्ष था 1905 का। इसी वर्ष 24 अगस्त को एटा जिले के बिजनौर शहर में पं० गंगा प्रसाद उपाध्याय के पुत्र हुआ जिसका नाम रखा गया सत्य प्रकाश। माता कलादेवी पुत्ररत्न को जन्म देकर सचमुच धन्य थीं।

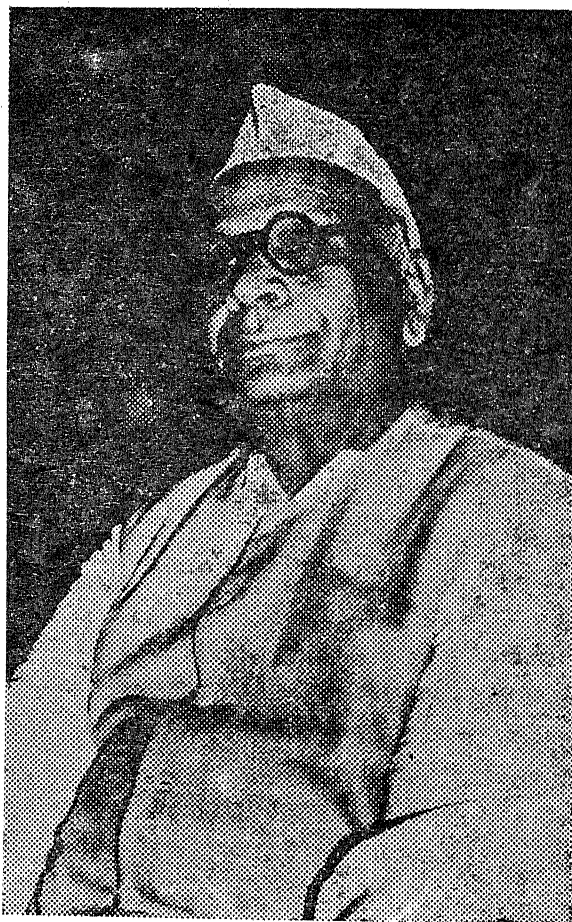
बालक सत्य प्रकाश की प्रारम्भिक शिक्षा-दीक्षा बाराबंकी में हुई। 1918 में वे प्रयाग आ गये और मैट्रीकुलेशन से ले कर आगे का उच्च अध्यन यहीं किया। प्रयाग उनकी कार्यस्थली बन गई।

1927 में उन्होंने इलाहाबाद विश्वविद्यायल से रसायन शास्त्र में एम० एस-सी० की डिग्री प्राप्त की। फिर उन्होंने सुप्रसिद्ध विज्ञानी डा० नीलरत्न धर के निर्देशन में शोध कार्य प्रारम्भ किया। पाँच वर्षों तक गहन शोध करके उन्होंने डी० एस-सी० डिग्री प्राप्त की। इस तरह सत्य प्रकाश अब डाक्टर सत्य प्रकाश बन गये। अभी शोध कार्य चल ही रहा था कि 1930 में रसायन विभाग में डिमांस्ट्रेटर नियुक्त हो गये। क्रमश: 1962 में वे विभागाध्यक्ष बने और पाँच वर्षों तक इस पद पर रह कर 1967 में अवकाश प्राप्त किया किन्तु 1972 तक रिसर्च प्रोफेसर के रूप में इलाहाबाद विश्वविद्यालय से जुड़े रहे।

डा० सत्य प्रकाश के निर्देशन में 22 विद्यार्थियों ने शोधकार्य सम्पन्न किया। कोलाइड, संकुलन, गतिकी, पराश्रव्यको, बहुलीकरण, पुरातत्व रसायन आदि विभिन्न विषयों में डा० साहब ने शोध कार्य कराया और कुल मिलाकर 150 शोध पत्रों का प्रकाशन किया।

हिन्दी लेखन की ओर आपकी रुचि प्रारम्भ से थी। प्रयाग स्थित विज्ञान परिषद की मासिक पत्रिका 'विज्ञान' में आप 1923 से लगातार लिखते रहे। शोध कार्य के दौरान ही आपने चार पाठ्य

श्रद्धांजलि



डा० सत्य प्रकाश (स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती)
(जन्म 24 अगस्त, 1905—मृत्यु 18 जनवरी, 1995)

पुस्तकें हिन्दी में लिखीं। आपने दस वर्षों तक 'विज्ञान' का सम्पादन भी किया। आप 1930 से वैज्ञानिक परिभाषिक शब्दावली निर्माण की ओर उन्मुख हुए और 1950 के बाद भारत सरकार द्वारा निर्मित पारिभाषक शब्दावली समिति के सदस्य के रूप में स्तुत्य कार्य किया।

हिन्दी में विज्ञान के प्रचार-प्रसार हेतु आपने तमाम लेख लिखे, रेडियो वार्ताएँ प्रसारित कीं, हिन्दी साहित्य सम्मेलन के मंचों से भाषण दिया, विज्ञान परिषद प्रयाग के सभापति पद को सँभाला, हिन्दी विश्वकोश के निर्माण में पूरा सहयोग दिया, 'भारत की सम्पदा' का सम्पादन-भार उठाया तथा भारतीय वैज्ञानिक परम्परा पर आधारित अनेक मौलिक ग्रन्थों की रचना की।

डा० साहब का वैवाहिक जीवन 1935 में प्रारम्भ हुआ। आपकी पत्नी रत्नकुमारी विदुषी थीं। डा० साहब के दो पुत्र हुए किन्तु कन्या नहीं हुई फलस्वरूप आजीवन कन्याओं को विशेष स्नेह और सम्मान प्रदान करते रहे। 1964 में पत्नी की अचानक मृत्यु से आपको धक्का लगा। आपकी समस्त भौतिकता ने पलटा खाया। अतः 10 मई 1971 को विज्ञान परिषद प्रयाग के प्रांगण में इष्ट मित्रों के बीच आपने संन्यास ग्रहण कर लिया। वे अपना घर छोड़ कर आर्य समाज भवन में भिक्षावृत्ति पर जीवन बिताते हुए सन्यासियों का जीवन बिताने लगे। शायद ही किसी वैज्ञानिक ने आश्रम परम्परा का ऐसा आदर्श उपस्थित किया हो।

डा० सत्य प्रकाश अब स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती बन गये। उन्होंने अपना सारा समय आर्य समाज की उन्नति, वेद प्रचार, व्याख्यान तथा देश-विदेश भ्रमण में लगाना प्रारम्भ कर दिया। धर्म प्रसार हेतु अफ्रीका की यात्राएँ कीं। वैदिक साहित्य सम्बन्धी ग्रन्थ लिखे। संन्यास काल में आपने ऋग्वेद तथा अथर्ववेद के अतिरिक्त उपनिषदों का भी अंग्रेजी अनुवाद किया जो अपने में अत्यन्त विशद एवं श्रमसाध्य कार्य था।

स्वामी जी जन्मजात आर्य समाजी थे। वे धर्म पुरोहित का भी कार्य करते रहे। उन्होंने आर्य समाजी रीति से न जाने कितने अन्तर्जातीय विवाह सम्पन्न कराये। इसका उन्हें गर्व था।

स्वामी जी की रुचियाँ बड़ी विचित्र थीं—चाहे वह जीवन पद्धति रही हो या लेखन रहा हो। जाड़ों में कम से कम कपड़े पहनना, संन्यासी होने के बाद एक ही अँचले से शीत बिताना, खादी का प्रयोग करना और एकाकी जीवन बिताना उनका जीवन बन गया। हँसी तो मानो उन्हें प्रकृति से उपहारस्वरूप मिली थी। शिष्ट एवं मृदुभाषी, परम विनोदी, बात बात में हँसी के फौव्वारे। आतिथ्य बेहद दर्जे का। कोई भी पहुँचता तो उसे खिलाये-पिलाये बिना न रहते। वे विशुद्ध शाकाहारी थे। चाय के स्थान पर काफी उन्हें अति प्रिय थी।

ज्ञान के तो अपार भण्डार थे। क्या साहित्य, क्या विज्ञान, क्या धर्म—सभी में परम निपुण थे। उनकी शब्द-साधना अनूठी थी। यद्यपि उन्होंने बचपन में संस्कृत का अध्ययन किया था किन्तु स्वाध्याय के बल पर उन्होंने वेदों का आकण्ठ आस्वाद किया था और भारत की वैज्ञानिक परम्परा की विशद व्याख्या भी की।

बचपन से कविता का शौक था। मैट्रिक में थे तभी ईशोपनिषद का हिन्दी पद्यानुवाद किया। फिर 'प्रतिबिम्ब' नाम से कविता संग्रह भी प्रकाशित किया। अन्तिम काल में भी उन्होंने कविताएँ लिखीं जिनके सम्पादन की मुझसे बातें करते रहते।

स्वामी जी को उनके कृतित्व के अनुकूल सम्मान भी कम नहीं मिला। उनकी विज्ञान की पुस्तकें हिन्दी साहित्य सम्मेलन, प्रदेश सरकार तथा केन्द्र सरकार द्वारा पुरस्कृत हुईं। अनेक वैज्ञानिक संस्थाओं के कार्यकलापों में आपका सक्रिय सहयोग रहा।

प्रयाग स्थित विज्ञान परिषद के तो आप कर्णधार रहे। 'अनुसन्धान पत्रिका' के प्रकाशन का सारा श्रेय आपको ही है जो निरन्तर 38 वर्षों से प्रकाशित होती आ रही है।

स्वामी जी अपना अन्तिम समय इलाहाबाद में बिताने के उद्देश्य से 1988 में दिल्ली से यहाँ चले आये और विज्ञान परिषद में 'ऋतम्भरा' नामक कुटिया में रहने लगे। उन्हें इसका गर्व था कि उन्होंने जिस संस्था को पल्लवित पुष्पित किया उसी के अभिन्न अंग बन कर रह रहे हैं। यहाँ वे हम लोगों से निरन्तर बातें करते, वेदों के अनुवाद का प्रूफ देखते, परिषद में भाषण देते और परम सुख का अनुभव करते रहे। वे लगातार यही कहते कि उनकी हर वस्तु परिषद की है और उनका अन्तिम संस्कार परिषद द्वारा सम्पन्न किया जाय। ऐसा निष्ठावान व्यक्ति विरले ही मिलेगा।

स्वामी जी से मेरा परिचय 1950 में हुआ जब मैं एम० एस-सी० में उनका छात्र था। उनकी भारतीय वेशभूषा तथा उनकी सरलता पर मैं तभी से मुग्ध था। किन्तु मेरा प्रथम सान्निध्य 1957 में 'अनुसन्धान पत्रिका' निकालने के प्रसंग में हुआ। तब मैं रसायन विभाग में अध्यापक नियुक्त हो चुका था और 'विज्ञान' में लेख लिखने लगा था। अनुसन्धान पत्रिका के सिलसिले में मैं बेली रोड स्थित उनके घर जाने लगा। पहले तो वे ही पत्रिका के प्रूफ देखते और मुझे भी बताते किन्तु बाद में उन्होंने यह सारा कार्य मुझ पर छोड़ दिया। आज भी मैं उसी मनोयोग से उनकी आज्ञानुसार कार्य करता आ रहा हूँ।

इस तरह धीरे-धीरे मैं उनका विश्वासपात्र बन गया। 'सरस्वती प्रकाशन' मथुरा वालों ने हाई स्कूल के लिए रसायन विज्ञान पर पुस्तक लिखने का आग्रह किया तो स्वामी जी ने मुझे इस कार्य के लिए अपना सहलेखक बनाया, मुझे पाठ्य पुस्तक तैयार करने की कला सिखाई और अन्त में जो अग्रिम पारिश्रमिक मिला, उसे मुझे ही दे दिया।

तब मेरी गुरुदक्षिणा का या यों कहें कि मेरी परीक्षा का समय आया। 1970 में कौंसिल आफ साइंटिफिक एंड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली की ओर से स्वामी जी के प्रधान सम्पादकत्व में 'वेल्थ आफ इंडिया' के हिन्दी अनुवाद 'भारत की संपदा' की योजना बनी तो मुझे विशेष हिन्दी अधिकारी के रूप में चुना गया और स्वामी जी ने आदेश दिया कि मैं प्रत्येक छमाही में कम से कम एक खंड तैयार करूँ। वे प्रयाग से ही मुझे निर्देश देते रहते। अब उन्हें मेरी कार्य प्रणाली पर विश्वास हो चुका था। वे

मुझसे परम सन्तुष्ट थे। फिर तो प्रसंग छिड़ने पर सबों के समक्ष मेरा परिचय देते—मेरी सब से बड़ी खोज है डा० मिश्र। मैं शर्म से गड़ जाता।

विज्ञान परिषद में मुझे लाने का श्रेय स्वामी जी को ही है। जब मैं 'विज्ञान' का सम्पादक बना तो वे मेरे अनुरोध पर व्यस्तता के बावजूद लेख लिख कर देते। कहा करते इस पत्रिका को 'नेचर' पत्रिका जैसा बनाना है। स्फुट लेखों के बजाय लेखमाला छापने का यत्न करो। किन्तु जब मैं यह कहता कि सरकारी अनुदान बढ़वा दीजिये तो प्रत्युत्तर होता—'इतनी सी छोटी पत्रिका के लिए अधिक अनुदान की क्या आवश्यकता? जो घटे तुम मुझसे माँग लिया करो।'

वे इधर कई वर्षों से 'अनुसंधान पत्रिका' के सम्पादक पद से हटने की जिद पकड़े रहे तो परिषद ने डा० चन्द्रिका प्रसाद जी को सम्पादक बना दिया किन्तु स्वामी जी को संस्थापक सम्पादक बने रहने दिया गया।

स्वामी जी का कहना था कि विज्ञान परिषद प्रारम्भ से समय से आगे के कार्य हाथ में लेता रहा है। हमने विज्ञान निकाला, हमने अनुसन्धान पत्रिका निकाली, अब कोई अन्य काम हाथ में लेना होगा। इसी उद्देश्य से परिषद की 75वीं वर्षगाँठ के अवसर पर दिल्ली के प्रकाशक 'पुस्तकायन' से कह कर बालोपयोगी विज्ञान की छोटी छोटी 75 पुस्तक निकालने की व्यवस्था कर दी। हमें सन्तोष है कि उनके जीवन काल में हम लगभग 35 पुस्तकें पूरी करा सके हैं।

जब मैंने विज्ञान परिषद की नवीन शाखाएँ खोलने का प्रस्ताव रखा तो उन्होंने अनुमोदन तो कर दिया किन्तु अन्त तक यही कहते रहे कि प्रयाग की विज्ञान परिषद को सशक्त होना चाहिए। उन्होंने परिषद के सभागार के निर्माण हेतु प्रचुर धन एकत्र किया और अभी भी वे धन लाते किन्तु उनकी अस्वस्थता ने उनके इस अभियान को रोक दिया। स्वामी जी में धन संग्रह की अभूतपूर्व क्षमता थी। वे अपनी सारी पुरस्कार राशियाँ विज्ञान परिषद को लाकर दे देते थे। यहाँ तक कि अपनी सारी पुस्तकें तथा अन्य सामग्रियों को भी परिषद को ही सौंप दिया।

जब स्वामी जी के अभिन्न मित्र तथा विज्ञान परिषद के हितैषी डा० आत्मा राम का निधन हुआ तो उन्होंने उनकी पत्नी सीता देवी से बीस हजार रुपये की राशि प्राप्त करके डा० आत्मा राम स्मृति व्याख्यान प्रारम्भ किये जाने का प्रस्ताव रखा जिसे परिषद ने स्वीकार कर लिया। फिर तो डा० गोरख प्रसाद, श्री सालिग राम भार्गव, राम दास गौड, डा० रत्न कुमारी तथा गंगा नाथ झा स्मृति व्याख्यान माला के लिए समुचित धनराशि जुटाने में स्वामी जी सबसे आगे रहे। उन्होंने डा० गोरख प्रसाद स्मृति व्याख्यान माला का प्रथम व्याख्यान भी दिया। मेरे कहने पर डा० नीलरत्न धर स्मृति फण्ड के अन्तर्गत भी उन्होंने एक व्याख्यान दिया। स्वामी जी भाषण कला में अति पटु थे।

जब स्वामी जी 70 वर्ष के हुए तो मैंने उनके अभिनन्दन की बात चलाई। वे पहले तो टालते गये किन्तु बारम्बार आग्रह करते रहने पर जब उन्होंने स्वीकृति दे दी तो मैंने 'वैज्ञानिक परिव्राजक'

नाम से अभिनन्दन ग्रन्थ का सम्पादन किया। इसके लिए जब जब मैं उनकी पत्नी के विषय में पूछा करता तो वे हँस कर टाल जाते। अन्ततः मुझे अन्य स्रोतों का सहारा लेना पड़ा।

स्वामी जी के साथ प्रारम्भ से ही विविध विषयों पर चर्चाएँ चला करती। मैं 1957 से ही उनसे पारिभाषिक शब्दावली के विषय में विचार-विमर्श करता रहा हूँ। जब मैं "वाष्प" लिखता तो काटकर "बाष्प" कर देते। मैं कहता मुझे ऐल्कोहाल, फॉस्फोरस आदि लिखने में सहजता का अनुभव नहीं होता तो वे बल देते—उच्चारण हमें वेब्स्टर कोश से लेने हैं। जब मैंने सुप्रसिद्ध नोबेल पुरस्कार विजेता पालिंग की पुस्तक 'कालेज केमिस्ट्री' का अनुवाद 'विद्यालय रसायन' नाम से पूरा किया तो उसका पुनरीक्षण स्वामी जी को करना था। वे कई महीनों तक अनूदित सामग्री को रोके रहे और मुझे बुलाकर कहा तुम साहित्यिक अनुवाद करते हो, भले ही तुम्हारी वाक्य-योजना हिन्दी की है। मैं उनके सुझाव मानता रहता।

स्वामी जी प्रायः अपने जीवन संस्मरण सुनाते—मैंने कविता भी की है। चलो फिर कविता लिखें। मैं प्रातः उठता रहा हूँ। मैंने अस्सी रुपये प्रति मास से नौकरी शुरू की है। अब अध्यक्ष हूँ—मैंने मोटर खरीदी, बेच दी, अब पैदल आने जाने का प्रयोग कर रहा हूँ—मैंने रामन तथा कृष्णन के साथ कार्य किया——1942 में जेल भी गया। जेल में लाल बहादुर शास्त्री के साथ रहा। मैंने हिन्दी में कम और अंग्रेजी में ज्यादा लिखा है। जब मैं 'विज्ञान' का सम्पादक था तो उसके पते चिपकाने, भेजने आदि का भी कार्य करता था। मैंने जो भी चाहा उससे अधिक ईश्वर ने मुझे दिया।

स्वामी जी मुझसे लगातार पत्र-व्यवहार बनाये रहे—चाहे वह उनका अफ्रीका प्रवास रहा हो या दिल्ली प्रवास। स्वामी जी को मैं राजयोगी कहता। वे कहते कि "मेरी कुटी में सारी चीजें उच्च कोटि की होनी चाहिए, विशेषतया शौचालय। मैं स्वयं उसकी सफाई करूँगा।"

अन्तिम दिनों में मेरे अनुरोध पर हिन्दी में 'योग' पर कई पुस्तकें लिखीं। वे नैचुरोपैथी के समर्थक थे किन्तु होमियोपैथी से चिढ थी। एक बार 'विज्ञान' में इस विषय में लेख छपा तो उन्होंने व्याख्यान दे कर होमियोपैथी की अवैज्ञानिकता सिद्ध की।

स्वामी जी से बातें करते, उनके साथ रहते तथा उनके साथ कार्य करते हुए अतीव आत्मीयता की अनुभूति होती थी।

स्वामी जी में विज्ञान एवं दर्शन का अभूतपूर्व समन्वय था। वे आमूल-चूल भारतीय थे और भारतीयता से प्रगाढ प्रेम था। उनका जीवन-दर्शन वैज्ञानिक दर्शन था। उन्हे गांधी तथा दयानन्द की विचार धारा में प्रचुर साम्य दिखता था। तभी तो उन्हों ने लिखा है "मैं जितना ही स्वामी दयानन्द को समझने का यत्न करता उतना ही विज्ञान के प्रति प्रेम जगता गया और जितना ही विज्ञान की ओर झुका उतना ही ईश्वर के प्रति प्रेमाभिभूत होता गया। मैं यह कह सकता हूँ कि विज्ञान के द्वारा मैं उत्तमतर आस्तिक बन सका हूँ। मैंने गांधी का जितना ही अध्ययन किया मुझे लगा कि उनके भीतर से दयानन्द बोल रहे हैं।"

सचमुच ही स्वामी जी अप्रतिम दार्शनिक विज्ञानी थे। उनकी मृयु से मेरी जो व्यक्तिगत क्षति हुई है वह अवर्णनीय है किन्तु उससे भी बड़ी क्षति विज्ञान तथा दर्शन के क्षेत्र में हुई है। मैं उन्हें सादर प्रणाम करता हूँ।

स्वामीजी की महत्वपूर्ण कृतियाँ

1. वैज्ञानिक विकास की भारतीय परम्परा : 1954 : बिहार राष्ट्र भाषा परिषद् पटना, मूल्य 7.00 रु०
2. Advanced Chemistry of Rare elements : 1956 एस० चाँद एण्ड कम्पनी दिल्ली 40.00 रु०
3. Founders of Science in Ancient India : 1965 : रिसर्च इंस्टीट्यूट आफ एंसिट साइंटिफिक स्टडीज, दिल्ली 150.00 रु०
4. साबुन और ग्लिसरीन 1966 : हिन्दी समिति, सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश, लखनऊ 11.00 रु०
5. A Critical Study of Brahmagupta and his works : 1968 इंडियन इंस्टीट्यूट आफ ऐस्ट्रानामिक एण्ड संस्कृत रिसर्च, नई दिल्ली 50.00 रु०
6. रासायनिक शिल्प की एकक संक्रियाएँ : 1973 हिन्दी संस्थान, उत्तर प्रदेश, लखनऊ 18.00 रु०
7. Patanjali Rajyoga 1975 एस चाँद एण्ड कम्पनी दिल्ली 70.00 रु०
8. Physico-chemical Aspect of High Polymers एस० चाँद एण्ड कम्पनी दिल्ली 10.00 रु०
9. भौतिक और रासायनिक नियतांक : 1978 हिन्दी संस्थान उत्तर प्रदेश, लखनऊ 10.00 रु०
10. The Bakhsali Manuscript : 1979 रत्न कुमारी स्वाध्याय संस्थान, विज्ञान परिषद् इलाहाबाद 50.00 रु०
11. The Sulba Sutra : 1979 रत्न कुमारी स्वाध्याय संस्थान, विज्ञान परिषद् इलाहाबाद 45.00 रु०
12. Coinagc in Ancient India : 1986 गोविन्द राम हासानन्द दिल्ली 600.00 रु०
13. प्राचीन भारत में रसायन का विकास : 1986 नया संस्करण, पुस्तकायन, दिल्ली 395.00 रु०

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायें। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगें।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

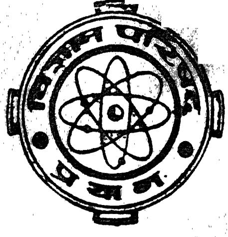
प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 38 July 1995 No. 3

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टैक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग

विषय-सूची

पृष्ठ

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

एक बहुपद सेट $\{\phi_n^*(x, y, z)$ के कुल समाकल निरूपण

राजेश कुमार तिवारी तथा रामजी सिंह
गणित विभाग, महाराजा कालेज, आरा (बिहार)

[प्राप्त—जनवरी 1, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य $\left\{\phi_n^*(x, y, z)\right\}_0^\infty$ बहुपदियों के निरूपण अनन्त द्विगुण तथा त्रिगुण सान्त त्रिगुण समाकलों के रूप में करना है। इन समाकलों से कुछ रोचक परिणाम भी प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Some integral representation of a polynomial set $\{\phi_n^*(x, y, z)\}$ *By* Rajesh Kumar Tiwary, D. N. College, Maushari Patna (Bihar) and Ramji Singh, Department of Mathematics, Maharaja College, Arrah (Bihar).

The aim of this paper is to represent the polynomials $\left\{ \phi_n^*(x, y, z) \right\}_0^\infty$ in terms of infinite double and a triple definite integrals. Some interesting results have been derived from these integrals.

1. प्रस्तावना

हम सार्वीकृत बहुपद सेट $\{\phi_n^*(x, y, z,)\}$ को जनक सम्बन्ध द्वारा परिभाषित करते हैं जिसमें फाक्स का H-फलन[1] निम्नलिखित रूप में निहित होता है।

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(x, y, z,)\, t^n = F(x, y, z, t)\, e^{c_1 xyzt}\, e^{4}—$$

$$H_{p,\, q+l\,:\,[p^{(i)},\, q^{(i)}+l]}^{l,\, N\,:\,(l,\, n^{(i)})}$$

$$-a_1 x^{b_1} t^{E'_0}, -a_2 y^{b_2} t^{c_2}, -a_2 z^{b_3} t^{c_3}$$

$$\left| \begin{matrix} \{(a_j : A_p^{(i)})\} : \{(d_p^{(i)} (i), D_p^{(i)} (i))\} \\ (b_j : B_{q+l}^{(i)}) : (e'_0, E'_0), \{(e'_{q'}, E'_{q'}\} (E_0'', E_0'''), - \end{matrix} \right.$$

$$-\{e'''_{q'''}, E'''_{q'''}\}] \qquad (1.1)$$

$$(i=1, 2, 3,)$$

जहाँ

$$\arg |-a_1 x^{b_1} t^{E'_0}| < \tfrac{1}{2}\pi R_1, |-a_2 x^{b_2} t^{c_2}| -$$

$-< \tfrac{1}{2}\pi R_2$, तथा $|-a_3 z^{b_3} t^{c_2}| < \tfrac{1}{2}\pi R_3 ; R_i \geq 0 -$

$(i=1, 2, 3)$.

$$R_i = \sum_{j=1}^{N} A_j^{(i)} - \sum_{j=N+1}^{P} A_j^{(i)} - \sum_{j=l+1}^{q} B_j^{(i)} +$$

$$-\sum_{j=1}^{l} B_j^{(i)} + E_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{q^{(i)}} E_j^{(i)} +$$

$$\sum_{j=1}^{n^{(i)}} D_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} D_j^{(i)} ; (i=1, 2, 3) \quad [2]$$

प्रमेय : (1.1) से हमें प्राप्त होता है कि

$$\phi_n^* (x, y, z) = \sum_{u_2=2}^{\left[\frac{n}{c_2/E_0''}\right]} \sum_{u_3=2}^{\left[\frac{n}{c_3/E_0'''}\right]} \sum_{w=0}^{\left[\frac{n}{c_4}\right]}$$

$$\frac{(E_1)^{*} . (E_1^{-c_1} . E_2)^{u_2} . (E_1^{-c_2} . E_3)^{u_3} . (E_1 \quad . c_1)^{w}}{[Q_{12} (i, j)_n^{**} \quad [P_r (i, j)]_{u_r}}$$

$$\frac{\left[Q_r (i, j)\right]_{u_r} . \left[l - Q^{(r)} (i, j) \right]_{u_r} - x^{b_1} \frac{n}{E'_0} \left(x^{-b_1} \frac{e_1}{E'_0} . y \frac{b_2}{E''_0} \right)^{u_2}}{|n^*|}$$

$$\times \frac{\left(x-b_1 \frac{c_4}{E'_0}\right)^w}{u_2 ! \; u_3 !}$$

उपपत्ति : निर्देशों [2,3,4] का अनुगामन करने तथा थोडा सा सरलीकरण करने पर हमें उपपत्ति प्राप्त होती है। विस्तार के लिए सिंह तथा तिवारी[5] का शोधपत्र देखा जा सकता है।

2. अनन्त द्विगुण समाकल निरूपण

हमें ज्ञात है

$$a_1=\beta_1+\eta_1+1,\ a_2=\beta_2+\eta_2+1,$$

$$b_1=\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1,\ b_2=\alpha_2+\beta_2+\eta_2+1,$$

$$A=\frac{\Gamma(a_1)\,.\,\Gamma(a_2)}{\Gamma(b_1)\,.\,\Gamma(b_2)}$$

$$\psi_n^*(x,y,z)=\frac{\Gamma(\alpha_1+\eta_1+p)\,.\,\Gamma(\alpha_2+\eta_2+q)\,.\,(A\Gamma(\beta_1+1)\,.\,\Gamma(\beta_2+1))}{\Gamma(\eta_1-p)\,.\,\Gamma(\beta_1+p+1)\,.\,\Gamma(l-p)\,.\,\Gamma(\eta_2-q)\,.\,\Gamma(\beta_2+q+1)}$$

$$R\int_0^\infty\int_0^\infty \rho^{\beta_1+p}\ \sigma^{\beta_2+q}\ {}_2F_1(a_1,\beta_1+2\,;b_1\,;-\rho)-$$

$$-\ {}_2F_1(a_2,\beta_2+2\,;b_2\,;-\gamma)x$$

$$\sum_{v=0}^{[n/c_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\lambda(v,w)F\left[\begin{array}{l}\Delta(e_1\,;-n),\ \Delta^3(e_1\,;l-(Q_1\,(i,j))-n),\\ \Delta^4(e_5\,;l-(Q_{12}\,(i,j)-n+e_5\,v),\ (Q_2\,(i,j)),\\ 1-(Q_5\,(i,j),\ \alpha_1+\eta_1+p,\ \alpha_2+\eta_2+q,\\ 1-p-\eta_1,\ 1+q-\eta_2,\ q\,;\\ \hline \Delta^1(e_1\,;l-(Q_1\,(i,j))-n),\\ \Delta^2(e_4\,;l-(Q_{10}\,(i,j))-n+e_3\,v),\\ \hline \Delta^5(e_4\,;(Q_{11}\,(i,j))-n+e_3\,v),\\ \Delta^6(e_1\,;(Q_4\,(i,j))-n),\\ \quad(Q_8\,(i,j))\,;\\ \quad(-e_1)^{e_1}P''\,.\,L_1\end{array}\right]d\rho\,.\,d\sigma\,. \tag{2.1}$$

उपपत्ति : निम्नलिखित पर विचार करें

$$I_2=\int_0^\infty\int_0^\infty \rho^{\beta_1+p}\ \sigma^{\beta_2+q}\quad {}_2F_1(a_1,\beta_1+2;b_1;-\rho)\ X\ {}_2F_1(a_2;\beta_2+2;b_2;-\gamma)\ X$$

$$R\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\lambda(v,w)F\left[\begin{array}{l}\Delta(e_1;-n),\ \Delta^3(e_1;l-(Q_7(i,j))-n),\\ \Delta^4(e_6;l-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v),\ (Q_2(i,j)),\\ 1-(Q_5(i,j)),\ a_1+\eta_1+p,\ a_2+\eta_2+q,\\ 1+p-\eta_1,\ p,\ l+q-\eta_2,\ q;\\ \Delta^1(e_1;l-(Q_1(i,j))-n,\\ \Delta^9(e_4;2-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v),\\ \Delta^5(e_4;(Q_{11}(i,j))-n+e_3v),\\ \nabla^6(e_1;(Q_4(i,j))-n(Q_8(i,j)),\\ \quad 1+\beta_1+p,\ 1+\beta_2+q;\\ \quad(-e_1)e_1P''.L_1\end{array}\right]d\rho\,.\,d\sigma$$

$$=R\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\frac{\lambda(v,w)\,\Delta_u[e_1;-n]\,\Delta^3{}_1[e_1;l-(Q_7(i,j))-n]}{u!\,\Delta_u{}^1[e_1;-(Q_1(i,j))-n]}$$

$$X\ \frac{\Delta_u{}^4[e_6;l-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v]\,[(Q_2(i,j))]_u\,[l-(Q_5(i,j))]_u}{\Delta_u{}^2[e_4;l-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v]\,\Delta_u{}^5[e_4;(Q_{11}(i,j))-n+e_3v]}$$

$$X\ \frac{(a_1+\eta_1+p)_4\,(a_2+\eta_2+q)_4\,(l+p-\eta_1)_u\,(P)_u\,(l+q-\eta_2)_u}{\Delta_u{}^6[e_1;(Q_4(i,j))-n]\,[Q_8(i,j))]_u\,(l+\beta_1+p)_u}$$

$$X\ \frac{(q)_u\,(-e_1)^{e_1u}P''(L_1)^u}{(l+\beta_2+q)_u}\int_0^\infty\int_0^\infty \rho^{\beta_1+p+u}\ \sigma^{\beta_2+q+u}\ -$$

$$-{}_2F_1(a_1,\beta_1+2;b_1;-\rho)$$

जोशी तथा जोशी [6] के परिणाम का उपयोग करने पर जो कि निम्नवत् है—

$${}_2F_1\,(a_2\,;\,\beta_2+2\,;\,b_2\,;-\sigma)\,d\rho\,d\sigma\quad\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty x^{\beta_1+u}\;y^{\beta_2+v}$$

$${}_2F_1\,(a_1\,,\,\beta_1+2\,;\,b_1\,;-x)\;{}_2F_1\,(a_2\,,\,\beta_2+2\,;\,b_2\,;-y)\,dx\,dy.$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_1-u)\,\Gamma(\beta_1+u+l)\,\Gamma(l-u)\,\Gamma(\eta_2-v)\,\Gamma(\beta_2+v+l)\,\Gamma(l-v)\,\Gamma(b_1)\,\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1+\eta_1+u)\,\Gamma(a_2+\eta_2+v)\,\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)\,\Gamma(\beta_j+l)\,\Gamma(\beta_2+l)}$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_1-p)\,\Gamma(\beta_1+p+l)\,\Gamma(l-p)\,\Gamma(\eta_2-q)\,\Gamma(\beta_2+q+l)\,\Gamma(l-q)\,\phi_n^*\,\Gamma(b_2)}{R\Gamma(a_1+\eta_1+p)\,\Gamma(a_2+\eta_2+q)\,(A.\,\Gamma(\beta_1+l).\,\Gamma(\beta_2+l))}$$

हमें परिणाम (2.1) मिलता है। इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो जाती है।

उपप्रमेय $a_3=0$ के लिए

$$\overset{*}{\phi}_n\,(x,y,z)=\frac{\Gamma(a_1+\eta_1+p)\,\Gamma(a_2+\eta_2+q)\,(A\,\Gamma(\beta_1+l)\,\Gamma(\beta_2+l)R^*}{\Gamma(\eta_1-p)\,\Gamma(\beta_1+p+l)\,\Gamma(l-p)\,\Gamma(\eta_2-q)\,\Gamma(\beta_2+q+l)}\,X$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \rho^{\beta_1+p}\;\omega^{\beta_2+q}\;{}_2F_1\,(a_1\,,\,\beta_1+2\,;\,b\,;-\rho)\;{}_2F_1\,(a_2\,,\,\beta_2+2\,,\,b_2\,;-\gamma)$$

$$F\left[\begin{array}{l}\Delta(e_1\,;-n)\,,\,\Delta^3\,(e_1\,;\,l-(Q_7^*\,(j\,))-n\\ \Delta^4(e_6\,;\,l-(Q_{12}^*\,(j\,))-n\,,\,(Q_2^*\,(j))\,,\,p,\\ \quad a_1-\eta_1-p,\,a_2+\eta_2+q,\,l+p-\eta_1,\,q,\,l+q-\eta_2:\\ \Delta^1(e_1;\,l-(Q_1^*\,(j\,))-n),\,\Delta^2(e_4;\,l-(Q_{10}^*(j\,))-n),\\ \quad(Q_8^*\,(j\,))\,;\\ \qquad\dfrac{(-e)^{e_1\,(1+q'-p')}\,(-e)^{e_6 q}\,y^{b_2}}{(-e_4)^{e_4 p}\,x^{b_1\,e_1}}\end{array}\right]d\rho\,.\,d\sigma\,. \tag{2.2}$$

(21) की विशिष्ट दशाएँ

(i)

$$H_n\,(x)=\frac{x^n\,\Gamma a_1+\eta_1+p)\,\Gamma a_2+\eta_2+q)\,(A\Gamma(\beta_1+l)\,F(\beta_2+l))}{n!\,\Gamma(\eta_1-p)\,\Gamma(\beta_1+p-l)\,\Gamma(l-p)\,\Gamma(\eta_2-p)\,.\,\Gamma(\beta_2+q+!\;\;)}\,X$$

$$\rho^{\beta_1+q}\ \sigma^{\beta_2+q}\ {}_2F_1(a_1,\beta_1+2;b;-\rho)-$$

$$-\quad {}_2F_1(a_2,\beta_2+2;b_2;+\gamma)$$

$$F\left[\begin{matrix} -\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\ a_1+\eta_1+p,\ a_2+\eta_2+q, \\ 1+p-\eta_1,\ p,\ l+q-\eta_2,\ q\ ;, \\ -\ ; \qquad (-\frac{1}{x^2}) \end{matrix}\right] d\rho\ .\ d\sigma.$$

(ii)

$$H_{2n}(x)=\frac{x^{2n}\,\Gamma(a_1+\eta_1+p)\,\Gamma(a_2+\eta_2+q).\ \ (A\,\Gamma(\beta_1+l).\,\Gamma(\beta_2+l))}{n!\,\Gamma(\eta_1-p)\,\Gamma(\beta_1+p+l)\,.\,\Gamma(l-p)\,\Gamma(\eta_2-p)\,.\,\Gamma(\beta_2+q+l)}$$

$$\rho^{\beta_1+p}\ \sigma^{\beta_2+q}\ {}_2F_1(a_2;\beta_2+2;b_2-y)\ X$$

$${}_2F_1(a_2;\beta_2+2;b_2-p)\ X$$

$$F\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}-n,\ -n,\ a_1+\eta_1+p,\ a_2+\eta_2+a, \\ l+p-\eta_1,\ p,\ l+q-\eta_2,\ q\ ; \\ -\ ; \qquad (-\frac{1}{x^2} \end{matrix}\right] d\rho\ .\ d\sigma\ .$$

अन्य बहुपदों के लिए कुछ अधिक विशिष्ट दशाएँ भी व्युत्पन्न की जा सकती हैं।

3. अनन्त त्रिगुण समाकल निरूपण

प्रमेय : $R_e(v)>0$ के लिए n एक धन या ऋण पूर्णाङ्क है।

हमें ज्ञात है कि

$$\overset{*}{\phi}_n(x,y,z)=\frac{8\,(l+v/2\pm\mu)}{\sqrt{\pi}\,i^{n}\,(\frac{1}{2}\pm\mu)\left(\frac{l+v}{2}\right)\int_0^\infty f(t).\,j_n(t)\,dt}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (\rho^2+\sigma^2)^{(\nu-l)/2} (\rho^2+\sigma^2+y^2)^{-\nu/2} X$$

$$\exp\left[i(\rho^2+\sigma^2+y^2)\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}\right)\right] \quad X \cos\left[2\mu\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\rho^2+\sigma^2}{y}\right)\right\}\right]$$

$$f\ (\rho+\sigma^2+y^2)\ X \sum_{v=0}^{[n/e_2]} \sum_{w=0}^{[n/c_4]}$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta(e_1\,;-n),\ \Delta^3(e_1\,;-(Q_7\,(i,j))-n), \\ \Delta^4(e_6\,;\,l-(Q_{13}\,(i,j))--n+e_5\,v),\ (Q_2\,(i,j)), \\ \quad l-(Q_5\,(i,j)\ l+\nu/2\pm\mu\,; \\ \Delta^1(e_1\,;\,l-(Q_1\,(i,j))-(Q_1\,(i,j))-n), \\ \Delta^2(e_4\,;\,l-(Q_{10}\,(i,j))-n+e_3\ v), \\ \Delta^5(e_4\,;\,(Q_{11}\,(i,j))-n+e_3\,v), \\ \Delta^6(e_1\,;\,(Q_4\,(i,j))-n), \\ \quad (Q_8\,(i,j)),\ 1/2+\nu/2,\ l+\nu/2; \\ \qquad (-e_1)^{\,e_1 P''}\ L_1 \end{array}\right] d\rho\,.\,d\sigma\,.\,dy \qquad (3.1)$$

उपपत्ति : हम विचार करेंगे कि

$$I_1=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (\rho^2+\sigma^2)^{(\nu-l)/2} (\rho^2+\sigma^2+y^2)^{-\nu/2}$$

$$\exp\left[i\ (\rho^2+\sigma^2+y^2)\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}\right) X\right.$$

$$\left.\cos\left[2\mu\ \{\tan^{-1}\left(\frac{\rho^3+\sigma^2}{y}\right)\right\}\right]$$

$$f\,(\rho^2+\sigma^2+y^2)\ X$$

$$R \sum_{v=0}^{[n/e_2} \sum_{w=0}^{[n/c_4} \lambda(v,\,w)\ X$$

$$F\left[\begin{array}{l} \Delta(e_1;-n),\ \Delta^3(e_1;\ l-(i_1 j))-), \\ \Delta^4(e_6;\ l-(Q_{12}\ (\mathrm{i}, j))-n+e_5\ v),\ (Q_2\ (i,j)), \\ \quad l-(Q_5\ (i,j)),\ l+v/2\pm\mu\ ; \\ \Delta^1(e_1;\ l-(Q_1\ (i,j))-n), \\ \Delta^2(c_4;\ l-(Q_{11}\ (i,j))-n+c_3\ v, \\ \Delta^5(e_4;\ (Q_{11}\ (i,j))-n+e_3\ v), \\ \Delta^6(e_1;\ (Q_4\ (i,j))-n), \\ \quad (Q_8\ (i,j)),\ \tfrac{1}{2}+v/2,\ l+v/2, \\ \quad (-e_1\ {}^{e_1}P''\ L_1 \end{array}\right] d\rho\ .\ d\sigma\ .\ dy$$

$$=R\sum_{u=0}^{[n/e_1}\ \sum_{v=0}^{[n/e_4}\ \sum_{w=0}^{n/c_4}$$

$$\frac{\lambda(v,w)\,\Delta_u\,[e_1;-n]\,\Delta_u^3[e_1;\ l-(Q_7\,(i,j)-n]}{u!\ \Delta_u^1\,[e_1;\ l-(Q\ (i,j))-n]\ \Delta_u^2\,[e_4;\ l-(Q_{10}\,(i,j))-n+e_3\ v]}$$

$$X\ \frac{\Delta_u^4\,[e_1;\ l-(Q_{12}\,(i,j))-n+e_5\ v]\ [(Q_2\,(\mathrm{i},j))]_u\ [l-(Q_5\,(i,j))]_u}{\Delta_u^5\,[e_4;\ (Q_{11}\,(i,j))-n+e_3\ v]\ \Delta_u^6\,[e_1;\ (Q_4\,(\mathrm{i},j)))-n]\ [(Q_8\,(i,j))]_u}$$

$$X\ \frac{(l+v/2\pm\mu)_u\,(=e_1)^{e_1\,up''}}{(l/2+v/2)_u\,(l+v/2)_u}\,X\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (\rho^2+\sigma^2)^{(v+2u-l)/2}$$

$$X\ (\rho^2+\sigma^2+y^2)^{(-v-2u)/2}$$

$$\exp\left[\,i\,(\rho^2+\sigma^2+y^2)\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}\right)\right]\ X$$

$$\cos\left[\,2\mu\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\rho^2+\sigma^2}{y}\right)\right\}\right]\ X\,f\,(\rho^2+\omega^2+y^2)\,d\rho\ .\ d\sigma\ .\ dy\ .$$

निर्देश [7] का व्यवहार करने पर अर्थात्

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (x^2+y^2)^{(v-l)2}\,(x^2+y^2+z^2)-v/2$$

$$X \exp\left[i(x^2+y^2+z^3)\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$\cos[2n(\tan^{-1} y/x)] . \cos\left[2\mu\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{z}\right)\right\}\right]$$

$$f(x^2+y^2+x^2)\, dx . dy . dx$$

$$= \frac{i^n\sqrt{\pi}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\mu) . \left(\frac{\Gamma(1+v}{2}\right)\Gamma(l+v/2}{8\Gamma(l+v/2\pm\mu)}$$

$$\int_0^\infty f(t)\, J_n(t)\, dt.$$

$$= \frac{i^n\sqrt{\pi}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\mu)\,\Gamma\left(\frac{l+v}{2}\right)(l+v/2)\,\phi_n^*(x, y, z)}{R\, 8\Gamma(l+v/2\pm\mu)}$$

$$\int_0^\infty f(t)\, J_n(t)\, dt.$$

इससे परिणाम (3.1) प्राप्त होता है। अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

उपप्रमेय : $a_3=0$ रखने पर

$$\overset{*}{\phi}_n(x, y, z) = \frac{8\Gamma(l+v/2\pm\mu)R^*}{\sqrt{\pi}\, i^n\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\mu)\,\Gamma\left(\frac{l+v}{2}\right)\int_0^\infty f(t)\, J_n(t)\, dt}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (\rho^2+\sigma^2)^{(v-l)/2}$$

$$X\ (\rho^2+\sigma^2+y^2) \exp\left[i(\rho^2+\sigma^2+y^2)\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}\right)\right] X$$

$$\cos\left[2\mu\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\rho^2+\sigma^2}{2}\right)\right\}\right] f(\rho^2+\sigma^2+y^2)$$

$$F\left[\begin{array}{l} \Delta(e_1\,;-n),\ \Delta^3(e_1\,;\,l-(Q_7^*(i,j))-n),\ (_2^*\,(j)) \\ \Delta^4(e_6\,;\,l-(\Omega_{12}^*(j))-n),\ l+\nu/2\pm\mu; \\ \Delta^1(e_1;\,l-(Q_1^*(j))-n),\ \Delta^2(c_4;\,l-Q_{10}^*(j))-n), \\ (Q_8^*\ (j)),\ 1/2+\nu/2,\ l+\nu/2; \\ \dfrac{(-e_1)^{e_1\,(l+q'-p')}\,(-e_6)^{e_6 q}\,y^{b_2}}{(-e_4)^{e_4 p}\,x^{b_1\,e_1}} \end{array}\right] d\rho\,.\,d\sigma\,.\,dy \tag{3.2}$$

(3.1) की विशिष्ट दशाएँ

(i) $$A_n^{(\lambda)}(x)=\frac{x^n\,.\,8\,\Gamma(l+\nu/2\pm\mu)}{n!\sqrt{\pi}\;\Gamma(\frac{1}{2}\pm\mu)\;\Gamma\left(\frac{l+\nu}{2}\right)\int_0^{\infty}f(t)\,J_n(t)\,dt}\;X$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\rho^2+\sigma^2)^{(\nu-l)/2}\,(\rho^2+\sigma^2+y^2)-\nu/2\;X$$

$$\exp\left[i(\rho^2+\sigma^2+y^2)\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}\right)\times\cos\left[2\mu\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\rho^2+\sigma^2}{2}\right)\right\}\right]\right.$$

$$f(\rho^2+\sigma^2+y^2)\;X\left[\begin{array}{l} -n,\ l+\lambda\,,\ l+\nu/2\pm\mu\,; \\ \frac{1}{2}+\nu/2\,,\ l+\nu/2\,; \\ (1/x) \end{array}\right] d\rho.d\sigma.dy.$$

(ii) $$H_{2n}(x)=\frac{x^{2n}\;8\Gamma(l+\nu/2\pm\mu}{n!\sqrt{\pi}\;i^n\Gamma(\frac{1}{2}\pm\mu)\Gamma\left(\frac{l+\nu}{2}\right)\int_0^{\infty}f(t)\,J_n(t)\,dt}$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\rho^2+\sigma^2)^{(\nu-l)/2}\,(\rho^2+\sigma^2+y^2)^{-\nu/2}\;X$$

$$\exp\left[i\,(\rho^2+\sigma^2+y^2)\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}\right)X\right.$$

$$\cos\,2\mu\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\rho^2+\sigma^2}{2}\right)\right]f(\rho^2+\sigma^2+y^2)\;X$$

$$F\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}-n,-n,\ l+\nu/2\pm\mu\ ;\\ \tfrac{1}{2}+\nu/2,\ l+\nu/2\ ;\\ (-l/x^2)\end{matrix}\right] d\rho\ .\ d\sigma\ .\ dy.$$

अन्य चिरसम्मत बहुपदों के लिए कुछ अधिक परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

संकेतन :

$$F(x,y,z,l)=\frac{\prod_{i=l}^{3}E_0^{(i)}\prod_{j=N+l}^{p}\Gamma\left(a_j-\frac{A_j'}{E_0'}e_0'-\frac{A_j''}{E_0''}e''_0-\frac{A_j'''}{E_0'''}e_0'''\right)}{\prod_{j=l}^{n}\Gamma\left(l-a_j+\frac{A_j'}{E_0'}e_0'+\frac{A_j''}{E_0''}e_0''+\frac{A_j'''}{E_0'''}e_0'''\right)}$$

$$X\frac{\prod_{j=l}^{q}\Gamma\left(l-b_j+\frac{B_j'}{E_0'}e'_0+\frac{B_j''}{E_0''}e''_0+\frac{B_j'''}{E_0'''}e_0'''\right)\prod_{j=n'+l}^{p}\Gamma\left(d_j'-\frac{D_j'}{E_0'}e_0'\right)}{\prod_{j=l}^{q}\Gamma\left(l-{}_jd'+\frac{D_j'}{E_0'}e_j'\right)\prod_{j=l}^{n''}\Gamma\left(l-d_j''+\frac{D_j''}{E_0''}e_j''\right)\prod_{j=l}^{n'''}\Gamma\left(l-d_j'''+\frac{D_j'''}{E_0'''}e_j'''\right)}$$

$$X\frac{\prod_{j=n''+l}^{p}\Gamma\left(d_j''-\frac{D_j''}{E_0''}e_0''\right)\prod_{j=n'''+l}^{p'''}\Gamma\left(d_j'''-\frac{D_j''}{E_0'''}e_0'''\right)}{\left(\frac{e_0}{E_0^{r_1}}\right)^{r_1}_{(a_r)}\ b_1\left(\frac{e_0'}{E_0'}\right)_X\ b_3\left(\frac{e_0''}{E_0''}\right)_Y\ Z\left(\frac{e_0'''}{E_0'''}\right)}$$

$$X\frac{\prod_{j=l}^{q}\left((l-e_j)+\frac{E_j'}{E_0'}e_0'\right)\prod_{j=l}^{q}\Gamma(l-e_j''+E_j''/E_j''\ e_0'')\prod_{j=l}^{q'''}\left(l-e_j'''+\frac{E_j'''}{E_0'''}e_0'''\right)}{\left\{e_0'+c_2\frac{e_0''}{E_0''}+c_3\frac{e_0'''}{E_0'}\right\}_t}$$

$$R=\frac{[Q_1(i,j)]_n\,[Q_{10}(l,j)]_n\,[l-Q_{11}(i,j)]_n\,[l-Q'(i,j)_n\,(E_1X^{b_1/E_0'})^n}{[Q_{12}(i,j)]_n\,[p_1(i,j)]_s\,n!}$$

$$R^*=\frac{\left[Q_1^*(j)\right]_n\cdot\left[Q_{10}^*(j)\right]_n\cdot}{n!\left[Q_{12}^*(j)\right]_n\cdot\left[P_1^*(j)\right]_n}$$

$$\alpha=\frac{Aj'''/E_0'''}{Aj'/E_0'},\ \beta=\frac{Aj''/E_0''}{Aj'/E_0'}\cdot\alpha'=\frac{Bj'''/E_0'''}{Bj'/E_0'}.\ \beta'=\frac{Bj''/E_0''}{Bj'/E_0'}$$

$$e_1=\frac{c^2}{E_0''},\ c_2=\frac{c_3}{E_0'''},\ c_3=\left(\frac{c_3}{E_0'''}-\frac{Aj'''/E_0'''}{Aj'/E_0'}\right)$$

$$c_4=\left(\frac{c_2}{E_0''}-\frac{Aj'''/E_0'''}{Aj'/E_0'}\right),\ c_5=\left(\frac{c_3}{E_0'''}-\frac{Bj'''/E_0'''}{Bj/E_0'}\right)$$

$$c_6=\left(\frac{c_2}{E_0''}-\frac{Bj''/E_0''}{Bj'/E_0'}\right)$$

$$\left[Q_{10}(i,j)\right]_{(\alpha' v+\beta' u+n}=\prod_{j-l}^{T}\prod_{j-l}^{(Aj'/E_0')}$$

$$\left(\frac{i-a_j+\frac{Aj'}{E_0'}e_0'+\frac{Aj''}{E_0''}e_0''+\frac{Aj'''}{E_0'''}}{Aj'/E_0'}\right)_{(\alpha u_3+\beta u_2+n}$$

$$\left[Q_{12}(i,j)\right]_{(\alpha' v+\beta u+n}$$

$$=\left(\frac{l-b_j+\frac{Bj}{E_0'}e_0'+\frac{Bj''}{E_0''}e_0''+\frac{Bj'''}{E_0'''}e_0'''}{Bj'/E_0'}\right)_{(\alpha' v+\beta' u+n)}$$

$$\left[\alpha u_3+\beta u_2+n\right]=\prod_{j=n+l}^{p}\prod_{j-i}^{Aj'/E_0'}\left(l-\left(\frac{l-a_j-l-\frac{Aj'}{E_0'}e_0'-\frac{Aj''}{E_0''}e_0''-\frac{Aj'''}{E_0'''}e_0'''}{Aj'/E_0'}\right)\right)$$

$$\left[Q_r(i,j)\right]_{u_r}=\prod_{j-l}^{n^{r_1}}\prod_{i-l}^{D_j^{r_1}/E_0^{r_1}}\left(\frac{i-d_j^{(r_1)}}{D_j^{r_1}/E_0^{r_1}}+e_0^{r_1}\right)_{u_r}$$

$$\left[P_r(i,j)\right]_{u_r}=\prod_{j-1}^{q^{r_1}}\prod_{i-1}^{E_j^{r_1}/E_0^{r_1}}\left(\frac{i-e^{(r_1)}}{E_j^{r_1}E_0^{r_1}}+e_0^{r_1}\right)_{u_r}$$

जहाँ $(r=1, 2, 3)$ $(r=', '', ''')$

$$\left[l-Q^{r}(i,j)\right]_{u_r}=\prod^{P^{r_1}}\prod_{i=1}^{D_j^{r_1}/E_0^{r_1}}\left(1-\left(\frac{i-1+d_j^{r_1}}{D_j^{r_1}/E_0^{r_1}}-{}_0^{(r_1)}\right)\right)_{u_r}$$

$$\left[Q_1^{*}(j)\right]_n=\prod_{j=1}^{p'}(d_j{}^{-\prime})_n,\ \left[Q_{10}^{*}(j)\right]_n=\prod_{j=1}^{p}(a_j{}')_n$$

$$,\ \left[Q_{12}^{*}(j)\right]_n=\prod_{j=1}^{q}(b_j{}')_n,$$

$$\left[p_1^{*}(j)=\prod_{j=1}^{q}(e_j{}^{-\prime})_n,\ \left[1-\left(Q_{11}^{*}(j)\right)\right]_n=\text{रिक्त}\right.$$

$$\left[1-Q'^{*}(j)\right]_n=\text{रिक्त}$$

$$n^{*}=n-e_1u_2-e_2u_3-c_4w,\ n_1^{*}=n-e_3u_3-e_4u_2-e_4w$$

$$n^{**}=n-e_5u_3-e_6u_2-c_4w$$

$$P^{*}=\left(1+\sum_{j=1}^{q^l}E_j{}'/E_0{}'+\sum_{j=1}^{q}B_j{}'/E_0{}'\right),\ q^{*}=\sum_{j=1}^{p'}D_j{}'/E_0{}'+\sum_{j=1}^{p}A_j{}'/E_0{}'$$

$$p^{**}=(1+q'+q)\ q^{**}=(p'+p)$$

$$Y^{**}=\frac{(-c_4)\,c^{y\,(1+q_pq'-p-p)}\times(c_1z)}{x_{b^1}\,c_4}$$

$$a^{*}=\frac{(-e_2{}^{e_2u_4}\left(1+\sum_{j=1}^{q'}E_j{}'/E_0{}'-\sum_{j=1}^{p'}D_j{}'/E_0{}'\right.-}{u_2!\,{}_{(-e_4)}\,e_4u_2\sum_{j=1}^{p}A_j{}'/E_0{}'}$$

$$=\frac{-e_5)\ e_5u_3\sum_{j=1}^{q}B_j{}'/E_0{}'\left(E_2\,Y\frac{b_2}{E_0{}''}\right)^{u_3}}{\left(E_1{}^{e_1}\,.\,x^{b_1}\ \frac{e_1}{E_0{}'}\right)}$$

$$\beta^* = \frac{(-e_2)^{e_2 u_3\left(1+\sum_{j=1}^{q'} E_j'/E_0' - \sum_{j=1}^{p'} D_j'/E_0'\right)}}{u_3!\,(-e_3)^{e_3 u_3 \sum_{j=1}^{p} A_j'/E_0'}}$$

$$\frac{(-e_5)^{e_5 u_3 \sum_{j=1}^{q} B_j'/E_0'} \left(E_3\, Z^{b_3} \cdot \frac{1}{E_0'''}\right)^{u_3}}{\left\{E_1 \cdot x^{b_1} \frac{e_2}{E_0'}\right)^{u_3}}$$

$$\lambda(v, w) = \frac{\Delta_v\left[e_2 ; -n+e_1 u\right]}{v!\,\Delta_v^1\left[e_2 ; 1-(Q_1(i,j)-n+e_1 u\right]}\,.$$

$$\frac{\Delta_v^3\left[e_2 ; 1-(Q_7(i,j))-n+e_1 u\right]}{\Delta_v^2\left[e_2 ; 1-(Q_{10}(i,j))-n\right]}$$

$$\times \frac{\Delta_v^4\left[e_5 ; 1-(Q_{12}(i,j))-n\right] . \left[(Q_3(i,j))\right]_v . \left[1-(Q_6(i,j))\right]_v}{\Delta_v^5\left[e_3 ; (Q_{12}(i,j)-n\right] \quad \Delta_v^6\left[e_2 ; (Q_4(i,j))-n+e_1 u\right]}\,.$$

$$\frac{(-e_2^{e_2 v}\, q'' . (-e_5)^{e_5 v \sum_{j=l}^{q} B_j'/E_0'}}{[(Q_9(i,j))]_v}$$

$$\times \frac{\left(E_3\, z^{b_3} \frac{1}{E_0'''}\right)^v \left[c_4 ; -n \pm e_1 u + e_2 v\right]}{(-e_3)^{e_3 v \sum_{j=1}^{p} A_j'/E_0'}\left(E_1^{e_2} . x^{b_1} \frac{e_2}{E_0'}\right)}$$

$$\frac{\Delta_w^3\left[e_4 ; 1-(Q_7(i,j))-n+e_1 u+e_2 v\right]}{w!\,\Delta_w^1\left[c_4 ; 1-(Q_1(i,j))-n+e_1 u+e_2 v\right]}$$

$$\times \frac{\Delta_m^4\left[c_4 ; 1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5 v+e_6 u \right].}{\Delta_w^2\left[c_4 ; 1-(Q_{10}(i,j))-n+e_2 v+e_4 u \right].}$$

$$-\frac{(-c_4)^{c_4 w (P'-Q')} . (c_1 z)^w .}{\Delta_w^5\left[c_4 ; (Q_{11}(i,j))-n+e_3 v+e_4 u\right]}$$

$$\times \frac{E_1^{c_4} . \left(x^{b_1} . \frac{c_4}{E_0'}\right)^{-w}}{\Delta_w^6\left[c_4 ; (Q_4(i,j))-n+e_1 u+e_2 v \right]}$$

$$P'=1+\sum_{j=1}^{q'} E_j'/E_0'+\sum_{j=1}^{q} B_j'/E_0'$$

$$Q'=\sum_{j=1}^{p} D_j'/E_0'+\sum_{j=1}^{p} A_j'/E_0'$$

निर्देश

1. फाक्स, सी , Trans. Amer. Math. Sci, 1961, **98**, 395-429,
2. प्रसाद वाई. एम. तथा भार्गव, एम, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका 1985, **28**, (**4**), 361-377.
3. रेनविले, ई. डी., Special Function, 1960.
4. सिह, आर. तथा पाण्डेय आर. एन., J. Nat. Acad. Math. 1988, **6**, 49-57.
5. सिह, आर. तथा तिवारी, आर. के. Mendal 1990, 7 (3-4), 431-433.
6. जोशी, जे. एम. सी. तथा जोशी एन., विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1986, **29**, **4**, 218.
7. श्रीवास्तव एच. एम. गोयल, एस. पी. तथा अग्रवाल, आर. के., Bull. Inst. Math. Acad Sci. 1981, **9**, 261-277, 251, eq (c-l).

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

राजस्थान के उभयचारी

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना,
झडोल (फ०), जिला उदयपुर (राज०), 313 702

[प्राप्त—जनवरी 1, 1995]

सारांश

राजस्थान भारत का सबसे शुष्क प्रदेश है। यहाँ उभयचारियों की मात्र 9 प्रजातियों की उपस्थिति दर्ज की गई है जब कि भारत में 206 प्रजातियाँ ज्ञात हैं। इस तरह भारत की मात्र 4.3% अभयचारी जातियाँ ही राजस्थान में ज्ञात हैं। ऐसा केवल वर्षा की कमी के कारण नहीं है बल्कि नदियों का प्रवाह राज्य के बाहर की तरफ होने के कारण जलमार्ग से उभयचारियों का अन्दर की ओर स्थानान्तरण न होने के कारण भी है।

Abstract

Amphibians of Rajastahan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.), Dist. Udaipur (Raj.).

Rajasthan is the most dry state of Indian Union. Out of 206 species known in India, only 9 have been recorded from this state. It means only 4.3% amphibians of India are confined to this state. Poor representation of Amphibians is not only due to less rainfall but outward flow of rivers is also responsible for this. Against the river current immigration of amphibians is not possible in Rajasthan.

भारत के उभयचारियों की 181 जातियों की जानकारी ईंगर तथा दत्त[5] के कार्य से मिलती है। अन्य प्रजातियों की सूचना चन्दा तथा घोष[1] और दास[3] ने दी। इन सभी के कार्यों से भारत में कुल 209 प्राति के उभयचारियों का पता चलता है। राजस्थान भारत में सबसे कम वर्षा वाला प्रान्त है। यहाँ की शुष्क जलवायु उभयचारियों के लिये बहुत अनुकूल नहीं है। विशेषकर पश्चिमी राजस्थान का

शुष्क मरु-प्रदेश अधिकांश उभयचारियों के लिये अनुपयुक्त है। राजस्थान में उभयचारियों की बहुत कम जातियाँ पाई जाती हैं। मनसुखानी तथा मूर्ति[6] के कार्यों से स्पष्ट होता है कि 1964 तक भारत में उभयचारियों की केवल **8** प्रजातियाँ ही ज्ञात हो पाई थीं। शर्मा[11] द्वारा एक और प्रजाति **यूपेरोडान सिस्टोमा** की खोज 1992 में जयपुर ज़िले में कर लेने से राजस्थान में ज्ञात उभयचारियों की संख्या 9 हो गई। इस जाति को 1994 में उदयपुर जिले में भी देखा गया। इस प्रकार भारत के कुल 4.3% उभयचारियों की उपस्थिति ही राजस्थान में दर्ज हो पाई है।

राजस्थान की सीमा से जुड़े अन्य राज्यों में राजस्थान से ज्यादा वर्षा होती है। गुजरात, मध्य प्रदेश, उत्तर प्रदेश, हरियाणा तथा पंजाब की सीमायें राजस्थान से मिलती हैं। उत्तर प्रदेश में हिमालय की स्थिति के कारण उभयचारियों हेतु हिमालय क्षेत्र एवं हिमालय से दूर मैदानी क्षेत्रों में भिन्न-भिन्न प्रकार के उत्तम आवास बन पड़ते हैं। राजस्थान के पड़ोसी प्रान्तों में उपस्थित उभयचारी प्रजातियों पर नजर डालें तो स्वतः स्पष्ट हो जाता है कि हरियाणा को छोड़ कर सभी प्रान्तों में उभयचारियों की प्रजातियों की संख्या राजस्थान से ज्यादा है। सम्भवतः हरियाणा में अपर्याप्त सर्वे के कारण कम प्रजातियाँ ज्ञात हुई हैं। हरियाणा की वातावरणीय परिस्थितियाँ राजस्थान से ज्यादा बेहतर हैं अतः वहाँ राजस्थान जितने या अधिक उभयचारी मिलने की पूर्ण संभावना है।

उपर्युक्त विवेचन से यह प्रश्न उभरता है कि राजस्थान में उसके पड़ोसी राज्यों के मुकाबले उभयचारियों की कम प्रजातियाँ क्यों मिलती हैं? प्रस्तुत पत्र में अन्य बातों के अलावा इस तथ्य पर प्रमुखता से विचार किया गया है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन क्षेत्र एवं उसकी परिस्थितियाँ

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान राज्य में किया गया है। राजस्थान मोटे तौर पर तीन भौगोलिक भागों में बँटा है—पश्चिम में थार का रेगिस्तान तथा पूर्व में उपजाऊ मैदानी भाग एवं दोनों के बीच में अरावली पर्वतमाला। राजस्थान में 100 मिमी से 800 मिमी तक वर्षा होती है। राजस्थान के दक्षिण पूर्वी एवं दक्षिण भागों में अधिक वर्षा होती है। पश्चिमी भाग में कम वर्षा होती है। बिलकुल पश्चिमी छोर पर वर्षा मान घट कर 100 मिमी वार्षिक रह जाता है। राजस्थान के दक्षिण-पूर्व एवं दक्षिण में नदी-नालों, तालाबों एवं बाँधों की बड़ी संख्या पाई जाती है। ये सब नम क्षेत्र उभयचारियों के रहने के लिये उपयुक्त आवास साबित होते हैं। केवलादेव घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर भी एक अच्छा नम आवास है। माउण्ट आबू क्षेत्र भी उभयचारियों के लिये श्रेष्ठ आवास है।

अध्ययन प्रक्रिया

निजी प्रेक्षण एवं पूर्ववर्ती अध्ययनों की मदद से उभयचारियों की अद्यतन सूची बनाई गई है। उभयचारियों को देखने एवं संग्रह करने का मानसून सबसे श्रेष्ठ समय है। मानसून की पहली दो तीन

बौछारों में जलाशयों के पास व धान के खेतों में उभयचारियों को देखा गया। रात्रि में टॉर्च की मदद से पानी भरे खेतों में मेंढकों को चकाचौंध कर पकड़ा गया। उनकी आवाजें भी टेप की गईं।

बिना पैरापेट दीवार वाले हौदों में गिरे मेंढकों को भी पकड़ा गया। सड़कों पर कुचल कर मारे गये मेंढकों पर भी प्रेक्षण लिये गये। आदिवासी लोगों से भी जानकारी संग्रह की गई।

परिणाम तथा विवेचना

राजस्थान के उभयचारियों की सूची सारणी 1 में प्रदर्शित की गई है। सारणी देखने से स्पष्ट होता है कि राजस्थान में 3 कुल के पाँच वंशों की कुल 9 जातियाँ पाई जाती हैं। रेनिडी कुल की 5 तथा माईक्रोहाईलिडी कुल के दो सदस्यों को मिला कर 7 जातियों के मेंढक (Frog) तथा ब्युफोनिडी कुल की दो टोड (Toad) प्रजातियाँ पाई जाती हैं।

सारणी 1

राजस्थान के उभयचारी

कुल	वैज्ञानिक नाम	स्थानीय नाम	वर्तमान में ज्ञात उपस्थिति क्षेत्र (जिले)
1. कुल रेनिडी (Ranidae)			
	1.1.1 Rana hexadactyla	—	जयपुर
	1.1.2 R. cynophlyctis	मेंढक, ढेडका	लगभग सम्पूर्ण राजस्थान
	1.1.3 R. tigrina	मेंढक, ढेडका, भुज, भैदा	डूंगरपुर, बांसवाड़ा, गंगानगर, जयपुर, नागौर, उदयपुर, सिरोही, अलवर, भरतपुर, दौसा, सवाई माधोपुर
	1.1.4 R. limnocharis	—"—	उदयपुर, जयपुर, नागौर, पाली, सिरोही,
	1.1.5 Tomopterna breviceps	—"—	जोधपुर, नागौर, उदयपुर
2. कुल ब्येफोनिडी (Bufonidae)			
	2.3.6 Bufo melanostictus	—"—	जयपुर, सिरोही, उदयपुर,
	2.3.7 B. andersoni (Syn. B. stomaticus)	—"—	बीकानेर, गंगानगर, जयपुर, नागौर, उदयपुर, अजमेर, सिरोही।
3. कुल माईक्रोहाइलिडी (Microhylidae)			
	3.4.8 Microhyla ornata	—"—	पाली, सिरोही, उदयपुर, अजमेर
	3.5.9 Uperdon systoma	—"—	जयपुर, उदयपुर
	योग	3 कुल, 5 वंश, 9 प्रजातियाँ	

राजस्थान एवं उसके पड़ोसी राज्यों के उभयचारियों की जानकारी चन्दा तथा घोष[1] दत्त[2] दास[3] ईगर तथा दत्त [5], मनसुखानी तथा मूर्ति[6], नायक[7] नायक तथा पटेल[8] नायक तथा, साथी[9] नायक तथा विनोद [10] शर्मा [11–12] आदि के कार्यों से मिलती है। इन कार्यकर्ताओं के अध्ययन से प्राप्त परिणाम सारणी 2 में प्रदर्शित किये गये हैं।

सारणी 2 को देखने से तुरन्त पता चलता है कि मध्य प्रदेश को छोड कर राजस्थान से क्षेत्रफल में छोटे उसके सभी पडोसी राज्यों में अपेक्षाकृत अधिक संख्या में उभयचारियों की जातियाँ पाई जाती हैं। राजस्थान में कम प्रजातियाँ मिलने के मुख्यतया दो कारण नजर आते हैं :—

1. शुष्क जलवायु, तथा
2. अधिकांश नदियों का प्रान्त के बाहर की तरफ बहना

अरावली पर्वत शृंखला मानसून की गति के समान्तर फैली होने से मानसून बिना बाधा के आगे निकल जाता है तथा राजस्थान सूखा रह जाता है। प्रान्त में आबू पर्वत पर सर्वाधिक 1500 मिमी वर्षा होती है। पूर्व दिशा की ओर वर्षा की अधिकतम मात्रा 800 मिमी तक मिलती है। ज्यों-ज्यों पश्चिम दिशा में बढते हैं, वर्षा कम होती जाती हैं। जोधपुर में 350 मिमी, बीकानेर में 300 मिमी. श्रीगंगानगर में 220 मिमी तथा जैसलमेर में 200 मिमी रह जाती है। अधिक वर्षा वाले क्षेत्रों में भी बारहमासी नदियाँ नहीं हैं। चम्बल को छोड़ कर लगभग सभी मौसमी नदियाँ हैं। वर्षा की कमी एवं अल्पकालीन वर्षा ऋतु के कारण आपेक्षिक आर्द्रता भी काफी कम पाई जाती है। गर्मियों में ऊँचा ताप मौसम को और सूखा बना देता है। शुष्क मौसम उभयचारियों के लिये उपयुक्त नहीं होता है।

राजस्थान की अधिकांश नदियाँ प्रान्त के भीतरी भागों से निकल कर बाहर की तरफ बहती हैं। (चित्र 1)। नदियों के बहाव की जानकारी इस प्रकार है—

1. बनास नदी :—उदयपुर जिले में कुम्भलगढ के पास अरावली श्रेणी के पूर्वी ढाल से निकल कर नाथद्वारा हो कर भीलवाडा एवं टोंक जिले में हो कर सवाई माधोपुर जिले में प्रवेश करती है। सपोटरा के निकट यह चम्बल में मिल जाती है।

2. बेडच नदी :—उदयपुर के पश्चिम में पहाड़ों से निकल कर आयड नदी के नाम से उदयसागर झील में गिर जाती है। वहाँ से उत्तर-पूर्व में बहती हुई चित्तौड के पास बिगोद स्थान पर बनास में मिल जाती है।

3. खारी नदी :—यह राजसमंद जिले में दिवेर से निकल कर पूर्व में बह कर भीलवाडा जिले में हो कर देवली के पास टोंक जिले में बनास में मिल जाती है।

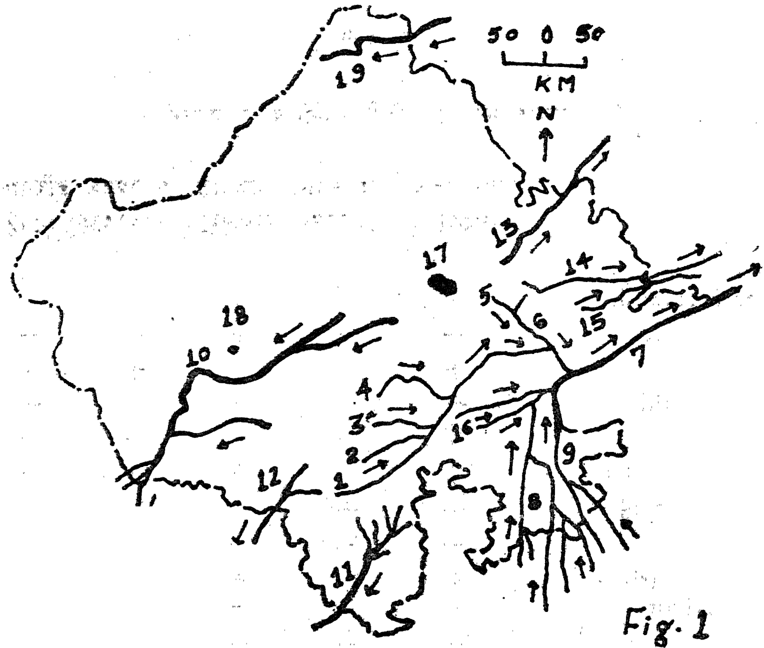
4. बांडी नदी :—जयपुर जिले के सामोंद व आमलोद के पहाडों से निकल कर टोंक जिले में बनास नदी में मिल जाती है।

सारणी 2

राजस्थान एवं पड़ोसी राज्यों के उभयचारी

	प्रजाति	उत्तर प्रदेश (294411)	राजस्थान (342239)	गुजरात (196024)	मध्यप्रदेश (443436)	हरियाणा (44212)	पंजाब (50362)
1.	Rana keralensis	—	—	+	—	—	—
2.	R. malabarica	—	—	+	+	—	—
3.	R. tigrina	+	+	+	+	+	+
4.	R. blanfordii	+	—	—	—	—	—
5.	R. vicina	+	—	—	—	—	+
6.	R. cyanophlictis	+	+	+	+	+	+
7.	R. hexadactyla	—	+	+	—	—	—
8.	R. leithi	—	—	+	+	—	—
9.	R. limnocharis	+	+	+	+	+	+
10.	R. cancrivora	—	—	—	+	—	—
11.	R. crass	+	—	—	—	—	—
12.	R. liebigil	+	—	—	—	—	—
13.	R. minica	+	—	—	—	—	—
14.	R. tuberculata	+	—	—	—	—	—
15.	Tomopterna breviceps	+	+	—	—	—	+
16.	T. rolandae	—	—	—	+	—	—
17.	Amolops formosus	—	—	—	—	—	+
18.	Polypedates maculatus	+	—	+	+	—	—
19.	Bufo stomaticus	—	+	—	—	—	—
20.	B. melanostictus	+	+	+	+	+	+
21.	B. viridis	—	—	—	—	—	—
22.	Microhyla ornata	+	+	+	+	+	+
23.	Kaloula pulchra	—	—	+	—	—	—
24.	Ramanella variegata	—	—	—	+	—	—
25.	Uperdon globulosus	—	—	—	+	—	—
26.	U. systoma	+	+	+	—	—	—
	योग	14	9	12	12	5	9

चिन्ह (—) प्रजाति की अनुपस्थति तथा (+) उपस्थिति दर्शाती है। राज्यों का क्षेत्रफल वर्ग किमी में सम्बन्धित प्रान्त के साथ कोष्टक में दिखाया है।



चित्र 1

चित्र 1· राजस्थान की कुछ प्रमुख नदियों के प्रवाह की दिशा—

1. बेडच नदी,
2. बनास नदी
3. कोठारी नदी
4. खारी नदी
5. धुंद (ढूंड) नदी
6. मोरेल नदी
7. चम्बल नदी
8. काली सिंध नदी
9. पार्वती नदी
10. लूनी नदी
11. माही नदी
12. साबरमती नदी
13. साबी नदी
14. बाणगंगा नदी
15. गंभीरी नदी
16. मेज नदी
17. सांभर झील
18. पचभद्रा झील
19. घग्घर झील

5. बुन्द व मोरेल नदी :—जयपुर जिले में अचरोल से बुन्द नदी निकल कर दौसा जिले में लालसोट के पास मोरेल नदी में मिल जाती है। सवाई माधोपुर जिले में खण्डार के पास यह बनास नदी में मिल जाती है।

6. चम्बल नदी :—मध्य प्रदेश के महू के निकट मानपुर की पहाड़ियों से निकल कर राजस्थान के कोटा जिले में प्रवेश करती है। कोटा एवं बूंदी जिलों में कई सहायक नदियाँ इसमें मिलती है। यह नदी उत्तर प्रदेश के एटा जिले में यमुना नदी में मिल जाती है।

7. काली सिंध नदी :—यह नदी मध्यप्रदेश में ईन्दोर नगर के पूर्व में उदयसागर के पास से निकल कर राजस्थान में झालावाड जिले में प्रवेश करती है तथा कोटा जिले में चम्बल नदी में मिल जाती है।

8. पार्वती नदी :—यह नदी मध्य प्रदेश में देवास के पास से निकल कर कोटा जिले को पार करती हुई सवाईमाधोपुर जिले में खंडार के पास चम्बल नदी में मिल जाती है।

9. लूनी नदी :—अजमेर जिले में पुष्कर से निकल कर पाली, जोधपुर, बाडमेर, जालोर जिले में हो कर गुजरात से कच्छ के रण में समाप्त हो जाती है।

10. माही नदी :—यह मध्यप्रदेश में धार की पहाड़ी से निकलती है। मध्यप्रदेश के रतलाम जिले में होती हुई राजस्थान के डूंगरपुर व बांसवाडा जिलों की सीमा बनाती हुई गुजरात में प्रवेश कर जाती है।

11. साबरमती नदी :—उदयपुर जिले से निकल कर गुजरात में प्रवेश कर जाती है।

12. घग्घर नदी :—हरियाणा में नाधन से निकल कर राजस्थान के गंगानगर जिले में अनूपगढ के पास रेत में समाप्त हो जाती है।

13. साबी नदी : जयपुर जिले की कोटपूतली तहसील से निकल कर अलवर जिले में हो कर हरियाणा में प्रवेश कर जाती है।

14. रुपारेल नदी :—अलवर जिले में बानपूर के पास से निकल कर भरतपुर के निकट उत्तर प्रदेश में चली जाती है।

प्रमुख नदियों के प्रवाह से ज्ञात होता है कि चम्बल, काली सिंध, पार्वती माही जैसी नदियाँ मध्य प्रदेश से निकल कर राजस्थान की बाहरी सीमाओं से गुजरती हैं। घग्घर नदी हरियाणा से निकल कर राजस्थान की रेत में खो जाती है। अन्य सभी नदियाँ राजस्थान से निकल कर अरब सागर या यमुना नदी में मिलने के लिये अग्रसर होती हैं। इस प्रकार के प्रवाह से राजस्थान के उभयचारो एवं उनके अण्डे बह कर राजस्थान से बाहर तो पहुँच सकते हैं परन्तु पड़ोसी प्रान्तों से पानी की आवक न होने से

अन्य क्षेत्रों के उभयचारी राजस्थान नहीं पहुँच पाते। मछलियाँ तो पानी की धारा के विपरीत तैर सकती है अतः बाहर से आसानी से राजस्थान पहुँच जाती हैं। यही कारण है कि राजस्थान में मछलियों की 95 प्रजातियाँ निवास करती हैं (जोहल तथा साथी[4])। राजस्थान में पश्चिमी हिमालय, अरावली एवं प्रायद्वीपीय भारत की प्रतिनिधि मछलियाँ मिलती हैं परन्तु उभयचारियों के संदर्भ में ऐसा नहीं है।

राजस्थान में इन्दिरा गाँधी नहर सिंचाई एवं पेयजल हेतु पश्चिमी राजस्थान में बहुत दूर तक पहुँच गई है। इस नहर के बहाव के साथ उत्तर प्रदेश, हिमालय प्रदेश एवं पंजाब के कई उभयचारियों के राजस्थान पहुँचने की संभावना है। इसी प्रकार चम्बल नदी के आस-पास के क्षेत्र में भी मध्य प्रदेश से बह कर आई स्थापित हो चुकी नई जातियाँ मिल सकती हैं।

राजस्थान में उभयचारियों के संरक्षण की समस्यायें

राजस्थान में वर्तमान में मनुष्यों द्वारा आवास-बर्बादी के अलावा उभयचारियों को कोई बड़ा प्रत्यक्ष खतरा नहीं है। दक्षिणी राजस्थान मे कथोड़ी नामक आदिवासी जाति जीवित राना साईनोफिल-कटिस नामक जाति के मेंढकों को मछली पकडने के लिये बेट की तरह काम में लेती हैं। दक्षिणी राजस्थान में आदिवासी मेंढकों को जादू-टोनों (Ethno-Megieology) में भी काम में लाते हैं। शहरों के आस-पास राना टिगेरिना प्राणी-विज्ञान के छात्रों द्वारा पकड़ा जाता है। सड़कों पर भी बहुत सारे उभय-चारी कुचल कर मारे जाते हैं। बार-बार के सूखे भी राजस्थान में उभयचारियों के आवासों को नुकसान पहुँचाते हैं। ट्रेक्टर से हल चलाने से भी अनेक उभयचारी मारे जाते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री रजा तहसीन, श्री यू० एम० सहाय, श्री डी० एन० पाण्डे, श्री एस० के० श्रीवास्तव, श्री ए० एस० चम्पावत, श्री राहुल भटनागर, श्री ललित पालीवाल का बहुत आभरी है जिन्होंने विभिन्न तरह से इस अध्ययन में अपना सहयोग किया है।

निर्देश

1. चंदा, एस० के० तथा घोष, ए० के०., JBHNS, 1988, 85 626-27.

2. दत्ता, एस० के० JBHNS, 1988, 85 (2), 439-41

3. दास, आई० JBHNS, 1990, 87 (2), 310-2

4. जोहल, मम० एस०, चहल, जे० एस०, तथा टंडन, के० के० JBHNS, 1993, 90 (3) 404-411.

5. ईगर, आर० एफ० ताथ दत्ता, एस० के०, JBHNS, 1986, 83, (Supp), 135-146.

6. मनसुखानी, एम० आर० तथा मूर्ति, टी० एस०एन०, Reo. Zool. Survey India. (Amphibia) 1964, **62** (1—2), 51-60.

7. नायक, वाई० एम०, JBHNS 1984, **81** (2) , 688-89.

8. नायक, वाई० एम० तथा पटेल, आर० के०, JBHNS, 1986, **83** (3) , 672.

9. नायक, वाई० एम०, विनोद, आर० के०, तथा पेल, सी०, JBHNS, 1993, **90** (2) , 299.

10. नायक, वाई० एन० तथा विनोद, आर० के०, JBHNS, 1993, **90**, 251-22.

11. शर्मा, एस० के०, JBHNS, 1992, **89** (1) , 133-34.

12. शर्मा, एस० के०, JBHNS, 1994, **91** (1) , 151-52.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

फोरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता हेतु मानदण्ड

एस० के० भट्ट,

गणित विभाग, शासकीय स्वशासी महाविद्यालय, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 13, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में पर्याप्त व्यापक एकल प्रतिबन्ध के अधीन फोरियर श्रेणी की (T) $(C, 1)$ संकलनीयता स्थापित की गयी है, जहाँ (T) टेलर संकलनीयता का प्रतीक है।

Abstract

A criterion for Taylor summabiiity of Fourier series. *By* S. K. Bhatt, Department of Mathematics, Government Autonomous College, Shahdol (M. P.).

In the present note, the (T) $(C, 1)$ summability of Fourier series has been established under a sufficiently generalised single condition, where (T) stands for the Taylor summability.

1. परिभाषायें तथा संकेतन

परिभाषा—मान लिया कि

$$\frac{(1-r)^{n+1}\,\theta^n}{(1-r\theta)^{n+1}}=\sum_{k=o}^{n} a_{n,k}\,\theta^k, \tag{1.1}$$

जहाँ $o \leqslant r < 1$ तथा $|r\theta| < 1$, द्वारा परिभाषित $\{a_{n,k}\}$ एक मैट्रिक्स है।

यदि

$$T_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\,S_k \to S, \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty,$$

तो हम कहते हैं कि आंशिक योग S_n वाली अनन्त श्रेणी $\sum_0 u_n$ योग S के लिए टेलर संकलनीय है अथवा हम सांकेतिक रूप में लिखते हैं—

$$\sum_0^{\infty} u_n = S \text{ (टेलर)}$$

उपर्युक्त परिभाषा में S_k को उसके $(C, 1)$ परिवर्त σ_k द्वारा प्रतिस्थापित करते हुए हमें (T) $(C, 1)$ संकलनीयता की परिभाषा प्राप्त होती है, जहाँ (T) टेलर संकलनीयता प्रदर्शित करता है।

मान लिया कि एक वास्तविक फलन $f(x)$ लेबेग की धारणानुसार अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। कल्पना कीजिए कि

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_0^{\infty} A_n(x) \tag{1.2}$$

फलन $f(x)$ से सम्बद्ध एक फोरियर श्रेणी है।

स्थिर वास्तविक संख्याओं x एवं S के लिए हम लिखते हैं :—

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$t\phi_1(t) = \int_0^t \phi(u)\, du$$

$$\Phi_1(t) = \int_o^t |\phi_1(u)|\, du$$

$$P(r, t) = 1 + r^2 - 2r \cos t$$

$$\theta(r, t) = \tan^{-1}\left(\frac{r \sin t}{1 - r \cos t}\right)$$

2. प्रस्तावना

टेलर अथवा सर्कल अथवा (γ, r) संकलनीयता की व्याख्या हार्डी[1] में की गयी है। योग करने की यह विधि $o \leqslant r < 1$ के लिए नियमित तथा $r = o$ के लिए साधारण अभिसरण के समतुल्य है।

हॉलैण्ड, साहने तथा जिम्बलैरियों[2] ने में फोरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता से सम्बन्धित निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है—

प्रमेय A—यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du = o(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to o, \tag{2.1}$$

तथा

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(1-r)\pi/n}^{\eta} \frac{\left| \phi(t) - \phi\left\{t + \frac{(1-r)\pi}{n}\right\} \right|}{t} \exp\left\{-\frac{nrt^2}{2(1-r)^2}\right\} dt = 0 \tag{2.2}$$

जहाँ η एक धनात्मक अचर है तो $f(x)$ की फोरियर श्रेणी बिन्दु x पर S के लिए टेलर संकलनीय होती है।

उपर्युक्त प्रमेय A फोरियर श्रेणी के अभिसरण के लिए, लेबेग-परीक्षण[3] के अनुरूप है। सचान[4] ने में एकल तथा पर्याप्त व्यापक प्रतिबन्ध के अन्तर्गत फोरियर श्रेणो की टेलर संकलनीयता यह सिद्ध करते हुए स्थापित की है कि—

प्रमेय B—यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du = 0\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0, \tag{2.3}$$

तो $f(x)$ की फोरियर श्रेणी बिन्दु x पर S के लिए टेलर संकलनीय होती है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य प्रमेय B के प्रतिबन्ध (2.3) को निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करने में कुछ सीमा तक शिथिल करना है :—

प्रमेय—यदि

$$\Phi_1(t) = 0\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0, \tag{2.4}$$

तो फोरियर श्रेणी (1.2), S के लिए (T) $(C, 1)$ संकलनीय होती है, जहाँ (T) टेलर संकलनीयता निरूपित करता है।

3. अनुमान—अपना प्रमेय सिद्ध करने के लिए हमें निम्नांकित अनुमानों की आवश्यकता होगी :—

अन्तराल $o \leqslant t \leqslant \pi$, $A = \dfrac{2r}{(1+r)^2 \pi^2}$ के लिये

$$\frac{(1-r)^n}{\{P(r, t)\}^{n/2}} = O\{\exp(-Ant^2)\} \tag{3.1}$$

अन्तराल $o<t<\frac{1-r}{n}$ के लिए

$$\sin\{nt+(n+1)Q(r,t)\}=O\left(\frac{nt}{1-r}\right) \tag{3.2}$$

अनुमान (3.1) अन्तराल $o\leqslant t\leqslant \pi/2$ के लिए फोर्बीज[5] द्वारा तथा $o\leqslant t\leqslant \pi$ के लिए सक्सेना[4] द्वारा निकाला गया है। अतः हम नीचे (3.2) मात्र को सत्यापित करेंगे—

मैकलारिन के प्रमेय द्वारा $Q(r, t)$ का विस्तार करने पर हम पाते हैं—

$$Q(r,t)=\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)$$

$$=\frac{rt}{1-r}-\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}\frac{t^3}{3!}+\ldots$$

$$=\frac{rt}{1-r}-t^3 H(t),$$

जहाँ

$o<H(t)<\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$ के साथ $H(t)$, t का घात फलन है

फलतः

$$|\sin\{nt+(n+1)Q(r,t)\}|$$

$$\leqslant nt+(n+1)\left\{\frac{rt}{1-r}-t^3 H(t)\right\}$$

$$=nt\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\frac{r}{1-r}-t^2 H(t)\right\}\right]$$

$$=\frac{nt}{1-r}\left[(1-r)+\left(1+\frac{1}{n}\right)\{r-t^2(1-r)H(t)\}\right]$$

$$=O\left(\frac{nt}{1-r}\right), \text{ क्योंकि } o\leqslant r<1,$$

और इससे वांछित अनुमान प्राप्त होता है।

4. प्रमेय की उपपत्ति

टिशमार्श[6] का अनुसरण करते हुए फोरियर श्रेणी (1.2) के आंशिक योग S_n का $(C, 1)$ परिवर्त σ_n इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\sigma_n - S + o(1) = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 (nt/2)}{t^2} \phi(t)\, dt. \tag{4.1}$$

खण्डश: समाकलन करने से हम पाते हैं—

$$\sigma_n - S + o(1) = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{t\phi_1(t)}{t^2} \sin^2 \frac{nt}{2}\right]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi t\phi_1(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2 (nt/2)}{t^2}\right) dt$$

$$= P - I, \text{ माना ।} \tag{4.2}$$

समाकलित भाग,

$$P = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\phi_1(\pi)}{\pi}\right] - \frac{2}{\pi} \lim_{t\to x} \left[\left(\frac{\sin^2 (nt/2)}{nt}\right) \phi_1(t)\right]$$

$$= o(1) - \frac{2}{\pi} \lim_{t\to x} \left(\frac{n \sin nt}{2n}\right). \lim_{t\to 0} \phi_1(t)$$

$$= o(1) + o(1) = o(1),$$

ज्यों—ज्यों $t \to o$ के पश्चात् $n \to \infty$.

तथा

$$I = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \{t\phi_1(t)\} \frac{d}{dt} \left\{\frac{2 \sin^2 (nt/2)}{t^2}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \{t\phi_1(t)\} \left[\frac{n \sin nt}{t^2} - \frac{4 \sin^2 (nt/2)}{t^3}\right] dt$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1/n^\alpha} + \int_{1/n^\alpha}^\pi\right] \frac{\phi_1(t)}{t^2} \sin^2 \frac{nt}{2}\, dt$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\phi_1(t)}{t} \sin nt\, dt$$

$$= (I_1 + I_2 + I_3) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\phi_1(t)}{t} \sin nt\, dt$$

जहाँ

$$o<\alpha<1/3.$$

अब

$$|I_1| \leqslant \frac{4}{n\pi} \int_0^{1/n} \frac{|\phi_1(t)|}{t^2} O(n^2t^2)\, dt$$

$$= O(n) \int_0^{1/n} |\phi_1(t)|\, dt$$

$$= O(n) o(1/n) = o(1), \text{ प्रतिबन्ध } (2.4) \text{ से}$$

खण्डश: समाकलन करने तथा (2.4) के सम्प्रयोग से—

$$|I_2| \leqslant \frac{4}{n\pi} \int_{1/n}^{1/n^{\alpha}} \frac{|\phi_1(t)|}{t^2} O(nt)\, dt$$

$$= O(1) \int_{1/n}^{1/n^{\alpha}} \frac{|\phi_1(t)|}{t}\, dt$$

$$= O(1) \left[o\left\{\frac{1}{\log 1/t}\right\} + \int o \left\{\frac{1}{t \log 1/t}\right\} dt \right]_{1/n}^{1/n^{\alpha}}$$

$$= o(1) + o(1) \Big[-\log \log 1/t \Big]_{1/n}^{1/n^{\alpha}}$$

$$= o(1) + o\{\log (1/\alpha)\}$$

$$= o(1), \text{ क्योंकि } o<\alpha<1/3.$$

साथ ही,

$$|I_3| \leqslant \frac{4}{n\pi} \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi} \frac{|t\phi_1(t)|}{t^3}\, dt$$

$$< \frac{4n^{3\alpha}}{n\pi} \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi} |t\phi_1(t)|\, dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{1-3\alpha}}\right) O(1)$$

$$= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \text{ क्योंकि } o<\alpha<1/3 \text{ तथा}$$

समाकलन $\int |t\phi_1(t)|\, dt$ के सातत्यांश से ।

इस प्रकार स्पष्ट है कि

$$I=o(1)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\sin nt\,dt \tag{4.4}$$

तदनन्तर (4.2), (4.3) तथा (4.4) के प्रभाव में—

$$\sigma_n-S+o(1)=o(1)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\sin nt\,dt$$

अब σ_n के टेलर अथवा (T) रूपान्तर अर्थात् फोरियर श्रेणी के आंशिक योग S_n के $(T)\,(C, 1)$ रूपान्तर को $(TC)_n^r$ द्वारा निरूपित करते हुए योग करने की टेलर विधि की नियमितता से हम प्राप्त करते हैं—

$$(TC)_n^r-S=o(1)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\sin kt\right\}dt$$

$$=o(1)-\frac{1}{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\,I_p\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\,e^{ikt}\right\}dt$$

$$=o(1)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\,I_p\left\{\frac{(1-r)^{n+1}\,e^{int}}{(1-re^{it})^{n+1}}\right\}dt$$

$$=o(1)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_1(t)}{t}\,\frac{(1-r)}{(P(r,t))^{n+1/2}}\sin\{nt+(n+1)Q(r,t)\}\,dt$$

जहाँ

$$P(r, t)=1+r-2r\cos t$$

तथा

$$Q(r, t)=\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)$$

हम लिखते हैं—

$$\left(TC\right)_n^r-S=o(1)-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1/m}+\int_{1/m}^{1/m^{\alpha}}+\int_{1/m^{\alpha}}^{\pi}\right]\frac{\phi_1(t)(1-r)^{n+1}}{t\,\{P(r, t)\}^{n+1/2}}$$

$$\times\sin\{nt+(n+1)Q(\bar{r}, t)\}\,dt$$

$$=o(1)-\frac{1}{\pi}\,[y/1+y/2+y/3],\ \text{माना,} \tag{4.5}$$

जहाँ

$$o<\alpha<1/2,\ o\leqslant r<1 \text{ तथा } m=\frac{n}{1-r}.$$

अनुमान (3.2) तथा परिकल्पना (2.4) से हमें मिलता है-

$$|y_1|\leqslant\int_0^{1/m}\frac{|\phi_1(t)|}{t}\,O\left(\frac{nt}{1-r}\right)dt$$

$$=O\left(\frac{n}{1-r}\right)\int_0^{1-r/n}|\phi_1(t)|\,dt$$

$$=O\left(\frac{n}{1-r}\right)o\left(\frac{1-r}{n}\right)=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \tag{4.6}$$

I_2 के प्राकलन की प्रक्रिया अपनाते तथा (2.4) का सम्प्रयोग करते हुए हम प्राप्त करते हैं—

$$|y_2|\leqslant\int_{1/m}^{1/m^\alpha}\frac{|\phi_1(t)|}{t}\,O(1)\,dt$$

$$=O(1)\int_{1/m}^{1/m^\alpha}\frac{|\phi_1(t)|}{t}\,dt$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty, \text{ क्योंकि } m=\frac{n}{1-r}. \tag{4.7}$$

अन्त में अनुमान (3.1) का सम्प्रयोग करते हुए हमें समाकलन $\int|t\phi_1(t)|\,dt$ के सातत्यांभ से प्राप्त होता है—

$$|y_3|\leqslant\int_{1/m^\alpha}^{\pi}\frac{|t\phi_1(t)|}{t^2}\,O\,\{\exp\{-A(n+1)t^2\}\,dt$$

$$=O\left[\frac{m^{2\alpha}}{\exp\left\{A(n+1)\frac{1}{m^{2\alpha}}\right\}}\right]\int_{1/m^\alpha}^{\pi}|t\phi_1(t)|\,dt$$

$$=O\left[\frac{\left(\frac{n}{1-r}\right)^{2\alpha}}{\exp\left\{\frac{An^{1-2\alpha}}{(1-r)^{-2\alpha}}\right\}}\right]\int_{(1-r/n)^\alpha}^{\pi}|t\phi_1(t)|\,dt$$

$$=o(1)O(1)=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty, \qquad (4.8)$$

क्योंकि $o<\alpha<1/2$.

अन्ततः (4.5), (4.6), (4.7) तथा (4.8) से परिणामों का संकलन उत्पन्न करता है—

$$\left(TC\right)_n^r - S = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty.$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डॉ० पी० डी० कठल, सेवा-निवृत्त प्राचार्य ने जो मार्गदर्शन किया है तथा डॉ० एम० पी० सचान, प्राध्यापक गणित एवं सेवा-निवृत्त प्राचार्य ने जो सक्रिय सहयोग एवं अत्यन्त महत्वपूर्ण सुझाव दिए हैं, तदर्थ लेखक दोनों महानुभावों का हार्दिक आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, आक्सफोर्ड यूनीवर्सिटी प्रेस, 1967.
2. हालैण्ड, ए० एस० बी०, साहने, बी० एन० तथा जिम्वलैरियो, जे०, कनै० मैथ० बुले०, 1979, 22 (3), 345-350.
3. लेबेग, एच०, मैथमेटिस्चे एनालेन, 1905, 61, 251-280.
4. सचान, एम० पी०, विज्ञान परि० अनु० पत्रिका, 1983, 26 (1), 21-26.
5. फॉर्बीज, आर० एल०, कनै० मैथ० बुले०, 1965, 8 (6), 797-808.
6. टिशमार्श, ई० सी०, The Theorem of Functions, 1961 पृष्ठ 414-416.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 38, No. 3, 1995

फोरियर श्रेणी की बोरेल संकलनीयता

एम० एम० पी० त्रिपाठी तथा एम० पी० सचान
गणित विभाग, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवा (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 1, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने पर्याप्त शिथिल एकल प्रतिवन्ध के अन्तर्गत फोरियर श्रेणी की बोरेल संकलनीयता पर एक प्रमेय स्थापित किया है।

Abstract

Borel summability of Fourier series. *By* M. M. P. Tripath and M. P. Sachan. Department Mathematics, Government Model Science College, Rewa (M. P.).

In the present paper, the authors have established a theorem on Borel summability of Fourier series under a sufficiently relaxed single condition.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

मान लिया कि $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$ अनन्त तक,

एक दी हुई अनन्त श्रेणी है तथा उसका आंशिक योग S_n,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है तब यदि

$$t(p) = e^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} S_n \tag{1.1}$$

एक निश्चित संख्या S की ओर प्रवृत्त होता है ज्यों-ज्यों $p \to \infty$, तो श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ योग S के लिए संकलनीय (B) अथवा बोरेल माध्य द्वारा संकलनीय कहलाती है। (हार्डी[1]).

मान लिया कि एक फलन $f(x)$ अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में लेबेग की धारणा के अनुसार समाकलनीय तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। मान लीजिए कि

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{0}^{\infty} A_n(x) \tag{1.2}$$

फलन $f(x)$ से सम्बद्ध फोरियर श्रेणी है।

हम निम्नलिखित संकेतनों का स्वच्छन्द उपयोग करेंगे :—

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\Phi_0(t) = \int_0^t \phi(u)\, du$$

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du$$

2. प्रस्तावना

हार्डी तथा लिटिलवुड[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करते हुए फोरियर श्रेणी की बोरेल संकलनीयता अन्वेषित की :—

प्रमेय A—यदि

$$\phi(t) = 0\left(\frac{1}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0, \tag{2.1}$$

तो फोरियर श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} A_n(x)$ योग S के लिए संकलनीय (B) होती है।

बोरेल संकलनीयता पर नॉप[3], स्टोन[4] तथा सिहल[5] द्वारा भी विचार किया गया है। निकट अतीत में साहनी[6] ने फोरियर श्रेणी की बोरेल संकलनीयता का अध्ययन किया तथा प्रमेय B सिद्ध किया है :—

प्रमेय B—यदि

$$\Phi(t) = 0\left\{\frac{t}{(\log 1/t)}\right\}, \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0, \tag{2.2}$$

तो फोरियर श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} A_n(x)$ योग S के लिए बोरेल माध्य द्वारा संकलनीय होती है ।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करना है :—

प्रमेय—यदि

$$\Phi_0(t)=0\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t\to 0, \tag{2.3}$$

तो फोरियर श्रेणी (1.2) योग S के लिए संकलनीय (B) अथवा बोरेल माध्य द्वारा संकलनीय होती है ।

3. **प्रमेय की उपपत्ति**

फोरियर श्रेणी (1.2) का आंशिक योग S_n इससे प्राप्त होता है :

$$S_n-S+0(1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t}\sin nt\,dt, \ (o<\delta<\pi),$$

आंशिक योग S_n का बोरेल परिवर्त B_p निम्नलिखित अनुसार प्राप्त किया जाता है :—

$$B_p-S+0(1)=\frac{e^{-p}}{\pi}\int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\sin nt\right\}dt$$

$$=\frac{e^{-p}}{\pi}\int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t}\left\{I_p e^{(pe^{it})}\right\}dt$$

$$=\frac{e^{-p}}{\pi}\int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t}\left\{e^{p\cos t}.\sin(p\sin t)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1/p^\alpha}+\int_{1/p^\alpha}^{\delta}\right]\frac{\phi(t)}{t}\frac{\sin(p\sin t)}{e^{p(1-\cos t)}}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}[R_1+R_2], \text{ माना, जहाँ } o<\alpha<1/2. \tag{3.1}$$

अब R_2 पर विचार करते हुए हम पाते हैं—

$$|R_2|=\left|\int_{1/p^\alpha}^{\delta}\frac{\phi(t)}{t}\frac{\sin(p\sin t)}{e^{2p\sin^2 t/2}}\,dt\right|$$

$$\leq \frac{p^{\alpha}}{e^{2p \sin^2 (1/2p^{\alpha})}} \int_{1/p^{\alpha}}^{\delta} |\phi(t)| dt$$

$$< \frac{p^{\alpha}}{e^{2p \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2p^{\alpha}}\right)^2}} O(1)$$

$$= O\left[\frac{p^{\alpha}}{e^{\frac{2}{\pi^2} p^{(1-2\alpha)}}}\right]$$

$$= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty, \qquad (3.2)$$

समाकलन $\int|\phi(t)|dt$ के सातत्यांश से तथा $o<\alpha<\frac{1}{2}$ होने से ।

खण्डशः समाकलन तथा परिकल्पना (2.3) से

$$R_1 = \int_1^{1/p^{\alpha}} \phi(t) \left\{\frac{\sin (p \sin t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}}\right\} dt$$

$$= \left[\Phi_0(t) \left\{\frac{\sin (p \sin t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}}\right\}\right]_0^{1/p^{\alpha}} - \int_0^{1/p^{\alpha}} \Phi_0(t) \frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin (p \sin t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}}\right\} dt$$

$$= \left[o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right) \left\{\frac{\sin (p \sin t)}{e^{2p \sin^2 t/2}}\right\}\right]_0^{1/p^{\alpha}} - \int_0^{1/p^{\alpha}} \Phi_0(t) \frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin (p \sin t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}}\right\} dt$$

$$= o(1) + \int_0^{1/p^{\alpha}} \Phi_0(t) \left[\frac{\sin (p \sin t)}{t^2 e^{2p \sin^2 t/2}} + \frac{\sin (p \sin t)\,(p \sin t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}}\right.$$

$$\left. - \frac{\cos (p \sin t).(p \cos t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}}\right] dt$$

$$= o(1) + R_{1\cdot1} + R_{1\cdot2} - R_{1\cdot3}, \text{ माना ।}$$

हम लिखते हैं—

$$R_{1\cdot1} = \left[\int_0^{1/p} + \int_{1/p}^{1/p^{\alpha}}\right] \Phi_0(t) \frac{\sin (p \sin t)}{t^2 e^{2p \sin^2 t/2}} dt$$

$=R_{1\cdot1\cdot1}+R_{1\cdot1\cdot2}$, माना ।

परिकल्पना (2.3) के सम्प्रयोग से—

$$|R_{1\cdot1\cdot1}| \leqslant \int_0^{1/p} \frac{|\Phi_0(t)|}{t^2}\, O(pt)\, dt$$

$$=O(p)\int_0^{1/p} o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right) dt$$

$$=o\left(\frac{p}{\log p}\right)\int_0^{1/p} dt$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p\to\infty$$

$$|R_{1\cdot1\cdot2}| \leqslant \int_{1/p}^{1/p^\alpha} \frac{|\phi_0(t)|}{t^2}\, O(1)\, dt$$

$$=O(1)\int_{1/p}^{1/p^\alpha} o\left(\frac{1}{t\log 1/t}\right) dt$$

$$=o\Big[-\log\log(1/t)\Big]_{1/p}^{1/p^\alpha}$$

$$=o\,(\log 1/\alpha)=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p\to\infty, \text{ क्योंकि } o<\alpha<\tfrac{1}{2}.$$

इस प्रकार हमने दर्शाया है कि

$$R_{1\cdot1}=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p\to\infty.$$

पुन: (2.3) के उपयोग द्वारा हम पाते हैं—

$$|R_{1\cdot2}| \leqslant \int_0^{1/p^\alpha} |\Phi_0(t)| \left\{\frac{p\sin t}{t\, e^{2p\sin^2 t/2}}\right\} O(1)\, dt$$

$$=O(1)\int_0^{1/p^\alpha} o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right)\left\{\frac{p\sin t}{e^{2p\sin^2 t/2}}\right\} dt$$

$$=O\left(\frac{1}{\alpha\log p}\right)\int_0^{1/p^\alpha} o\left\{\frac{p\sin t}{e^{2p\sin^2 t/2}}\right\} dt$$

$$=O\left(\frac{1}{\alpha\log p}\right) o\left[-\frac{1}{e^{2p\sin^2 t/2}}\right]_0^{1/p^\alpha}$$

$=o(1)$, ज्यों-ज्यों $p \to \infty$, क्योंकि $o < \alpha < 1/2$.

इसी प्रकार (2.3) तथा द्वितीय मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए,

$$R_{1\cdot 3} = \int_0^{1/p^\alpha} \left\{ \frac{\Phi_0(t)}{t\, e^{2p \sin^2 t/2}} \right\} \cos(p \sin t)(p \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{1/p^\alpha} o \left\{ \frac{1}{\log (1/t)} \right\} \cos(p \sin t)(p \cos t)\, dt$$

$$= o \left(\frac{1}{\alpha \log p} \right) \int_{1/p^\Delta}^{1/p^\alpha} \cos(p \sin t)(p \cos t)\, dt,$$

जहाँ आवश्यकतानुसार Δ एक से कितना ही बड़ा है ।

$$= o \left(\frac{1}{\alpha \log p} \right) \left[\sin (p \sin t) \right]_{1/p^\Delta}^{1/p^\alpha}$$

$=o(1)$, ज्यों-ज्यों $p \to \infty$, क्योंकि $o < \alpha < 1/2$.

उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि

$$R_1 = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty \qquad (3\,3)$$

अन्ततः (3.1), (3.2) तथा (5.3) के परिणामों का संकलन देता है–

$$B_p - S = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

इसके साथ ही प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण होती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी के डॉ० पी० डी० कठल, सेवा-निवृत्त प्राचार्य ने जो सहयोग, प्रोत्साहन एवं अत्यन्त उपयोगी सुझाव दिए हैं, उसके लिए लेखक उनके आभारी हैं ।

निर्देश

2. हार्डी, जी० एच० डायवर्जेंट सीरीज, ऑक्सफोर्ड, 1963) पृष्ठ 80

2. हार्डी, जी० एच० तथा लिटिलवुड, जे० ई०, जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1932 7, 252-256.

3. नॉप, के०, "थ्योरी ऑफ अप्लीकेशन्स ऑफ इनफिनिट सीरीज", लन्दन, 1928.

4. स्टोन, एम० एम०, अमेरि० जर्न० ऑफ मैथ०, 1926, 48, 101-102.

5. सिंहल, एस० डी०, ड्यूक मैथ० जर्न०, 1955, 22, 445-450.

6. साहनी, बी० एन०, बोलै० यू० एम० आई० 1961, 16 44-47.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

द्वितीय प्रकार के बहुचर बनौंली बहुपदों के कतिपय महत्वपूर्ण प्रमेय

आर० एन० शुक्ल तथा एस० एस० मिश्रा

गणित विभाग, अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद (उ. प्र.)

[प्राप्त—जनवरी 5, 1995]

सारांश

लेखकों द्वारा परिभाषित बहुचर बर्नौली प्रमेय पर और आगे कार्य करते हुए कुछ नूतन प्रमेय प्राप्त किये गये हैं ।

Abstract

Some important theorems on multivariate Bernoulli polynomials of second kind. *By* R. N. Shukla and S. S. Mishra, Department of Mathematics and Statistics, Avadh University, Faizabad (U. P.).

A multivariate Bernoulli polynomial defined by [5] has been subjected to further investigation in order to yield some novel theorems such as complimentary argument and additions theorems etc.

1. प्रस्तावना

जार्डन[1], रिचार्डसन[4] तथा प्रभाकर तथा गुप्ता[2] ने द्वितीय प्रकार के बर्नौली बहुपदों का गहन अध्ययन किया है । हालही में लेखकों ने[4] उसी बहुपद का सार्वीकरण दो चरों (variates) में किया है । इन्ही लेखकों ने[5,6] आगे अध्ययन करते हुए निम्न प्रकार से बहुपद की परिभाषा दी है—

$$\frac{\sum_{r=1}^{k} r\, p_r\, t^{r-1} \prod_{r=1}^{k} (1+t^r)^{x_r}}{\prod_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(p_1, p_2, \ldots, p_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

जहाँ p_r, $r=1, 2, 3..., k$ अ-शून्य असली संख्याएँ है ।

2. पूरक आर्गूमेंट प्रमेय

यदि $x_1, x_2, ...x_k$ चर हों तो $(1-x_1), (1-x_2), ..., (8-x_k)$

प्रमेय

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \cdots p_k]}(x_1, x_2, ..., x_k) \frac{t^n}{n!} = (1+t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, ..., p_k]}(x_1, x_2, ...x_k) \frac{t^n}{n!} \tag{2.1}$$

उपपत्ति

परिभाषा (1.1) से प्रारम्भ करके तथा (x_1) स्थान (2.1) पर $(1-x_1)$ रखने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, ..., p_d]}(1-x_1, x_2, ..., x_k) \frac{t^n}{n!} = \frac{\sum_{t^{r-1}}^{k} rp_r (1+t)^{1-x_1} \sum_{r=2}^{k} (1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r}}$$

$$= \frac{(1+t) \sum_{t^{r-1}}^{k} r\, p_r (1+t)^{-x_1} \sum_{r=2}^{k} (1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r}}$$

सम्बन्ध की दृष्टि से उपर्युक्त व्यंजक निम्न रूप ले लेता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, ..., p_k]}(1-x_1, x_2, ..., x_k) \frac{t^n}{n!} = (1+t^n) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1 .. p_d]} x_1, ..., x_E \frac{t^n}{n!}$$

जिससे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हो जती है ।

प्रमेय

$$\sum_{n=0} A_n^{[p_1, p_2, ...p_r]}(1-x_1, 1-x_2, ..., x_k) \frac{t^n}{n!} = (1+t^2) \sum_{r=1}^{k} A_n^{[p_1, ..., p_r]}(x_1, ..., x_k) \frac{t^n}{n!} \tag{2.2}$$

उपपत्ति

परिभाषा की सहायता से हम लिख सकते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!} = \frac{\sum_{r=1}^{k} rp_r(1+t)^{1-x_1}(1+t^2)^{1-x_2} \prod_{r=3}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}}$$

$$= \frac{(1+t)(1+t^2) \sum_{r=1}^{k} rp_r(1+t)^{-x_1}(1+t^2)^{-x_2} \prod_{r=3}^{d}(1+t^r)^{x_r}}{\prod_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}}$$

$$=(1+t+t^2+t^3) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(-x_1, -x_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

जो प्रमेय की उपपत्ति के लिए पर्याप्त है।

शेष के लिए अन्य प्रमेयों की उपपत्ति उपर्युक्त की तरह है।

3. योग प्रमेय

प्रमेयः यदि p_1 धन पूर्णांक हो तो

$$A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1 x_2, \ldots, x_k) = \sum_{k=0}^{p_1} \binom{p_1}{k} (n)_k A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots x_k \qquad (3.1)$$

उपपत्ति

समीकरण (1.1) से हम पाते हैं कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!} = \frac{\sum_{r=1}^{k} r\, p_r\, t^{r-1} (1+t)^{p_1+x_1} \prod_{r=2}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\prod_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}}$$

$$=(1+t)^{p_1} \frac{\sum\limits_{t^{r=1}}^{k} r\, p_r \sum\limits_{r=1}^{k} (1+i^r)^{x_r}}{\prod\limits_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r}}$$

$$=\sum_{k=0}^{p_1} \binom{p_1}{k} t^k \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

कोशी के गुणन नियम के द्वारा

$$=\sum_{k=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \binom{p_1}{k} \frac{t^{n+k}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \binom{p_1}{k} \frac{t^{n+k}}{n!}$$

उपर्युक्त व्यंजक में $t^n/n!$ के गुणांकों की तुलना करते पर

$$A_n^{[p_2, p_2, \ldots p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{p_1} \binom{pt}{k} (n)_k A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{p_1} \binom{p_1}{k} (n)_k A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय

यदि p_1 तथा p_2 घन पूर्णांक हों तो

$$A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+p_1, x_2+p_0 \ldots, x_k) = \sum_{k=0}^{p_1+p_1} \binom{p_1+p_2}{k} (n)_k A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (3.2)$$

उपपत्ति

समीकरण (1.1) को दृष्टि में रखते हुए

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+x_2+p_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{k} rp_r t^{r-1}(1+t)^{p_1+x_1}(1+t)^{p_2+x_2} \prod_{r=3}^{n}(1+t^r)^{k_r}}{\prod_{r=1}^{k} (\log(1+t^r))^{p_r}}$$

$$=(1+t)^{p_1+p_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k}(x_1, p_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{p_1+p_2} \binom{p_1+p_2}{k} t^k \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_2, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

कोशी के गुणन नियम के द्वारा

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \binom{p_1+p_2}{k} \frac{t^{n+k}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+p_1, x_2+p_2, x_3, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \binom{p_1+p_2}{k} \frac{t^{n+k}}{n!}$$

उपर्युक्त समीकरण में दोनों पक्षों में $t^n/n!$ के प्रत्यक्ष परिणाम द्वारा हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+p, x_2+p_2, \ldots, x_k)$$

$$=A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \binom{p_1+p_2}{k} \frac{t^n}{(n-k)} \frac{n!}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{p_1+p_2} \binom{p_1+p_2}{k} A_{n-k}^{[p_1+p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{p_1+p_2} \binom{p_1+p_2}{k} (n)_k A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}$$

अथवा $A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+p_1, x_2+p_2, x_3 \ldots x_k)$

$$= \sum_{k=0}^{p_1+p_2} \binom{p_1+p_2}{k} (n)_k \, A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ ।

प्रमेय

यदि p_1, p_2 तथा p_3 धन पूर्णांक हों तो

$$A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+p_1, x_2+p_2, x_2+p_3, x_4, \ldots, x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{p_1+p_2+p_3} \binom{p_1+p+p_3}{k} (n)_k \, A_{n-k}^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1, x_2, \ldots, x_k] \tag{3.3}$$

उपपत्ति

परिभाषा (1.1) से

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}(x_1+p_1, x_2+p_2, p_4+_4, \ldots, x_k) \frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{t^{r=1}}^{k} rp_r (1+t)^{p_1+x_1} (1+t)^{p_2+x_2} (t+t)^{p_1+x_1},$$

$$= \frac{\prod_{r=4}^{k} (1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r}}$$

$$= \frac{(1+t)^{p_1} (1+t^{p_2} (1+t)^{p_3} \sum_{t^{r=1}}^{n} rp_r \prod_{r=1}^{n} (1+t^{x_r})}{\prod_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r}}$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्षों के $t^n/n!$ गुणांकों की तुलना करने कर

$$A^{[p_1; p_2, \ldots, p_k]}_{n}(x_1+p_1, x_2+p_2, x_3+p_3, x_4, \ldots, x_k)$$

$$= A^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}_{n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \binom{p_1+p_2+p_3}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p_1+p_2+p_3} \binom{p_1+p_2+p_3}{k} A^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}_{(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p_1+p_2+p_3} \binom{p_1+p_2+p_3}{k} (n)_k \, A^{[p_1, p_2, \ldots, p_k]}_{n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

शेष अ-शून्य असली संख्याओं के लिए अन्य प्रमेयों की उपपत्ति उपर्युक्त जैसी है।

निर्देश

1. जार्डन, सी०, Calculus of Finite Difference, चेल्सला पब्लिके शन्स कम्पनी, न्यूयार्क 1950
2. प्रभाकर, टी०, आर०, तथा शारद शुक्ल, Indian J. Pure and Applied Maths. 1986, 11, 61-62
3. पाल, एस० जी०, राय, वी, एस तथा सिंह, एस० एन०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान, पत्रिका 1986, 29(3)
4. रिचार्डसन, सी० एच०, An Introduction to the Calculus of finite Differenc. D. Benas trand Co. New York, 1955
5. शुक्ला, आर० एन० तथा मिश्रा, एस० एस०, Indian J. Pure and Applied Maths (प्रेषित)
6. वही, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका (प्रेषित)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

लौह (आयरन) से समृद्ध किये गये मल जल का पालक की उपज तथा भारी तत्वों के उद्ग्रहण पर प्रभाव

शिवगोपाल मिश्रा, अरुण कुमार सिंह, दिनेश मणि तथा देवीदयाल पांडेय
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मार्च 5, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य पालक की उपज पर लौह से समृद्ध किये मल जल का प्रभाव ज्ञात करना है। इसके लिए मिट्टी में लौह की दो विभिन्न मात्राएँ (20 या 40 पी० पी० एम) मिलाकर मल जल से सिंचाई करके पालक उगाई गयी। यह देखा गया कि मल जल को लौह से जितना समृद्ध बनाया जाता है उसी अनुपात में पालक की बढ़वार व जैवभार में वृद्धि होती है किन्तु भारी धातुओं के उद्ग्रहण में कोई विशेष प्रभाव परिलक्षित नहीं होता है।

ऐसा प्रतीत होता है कि लौह (आयरन) तथा कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति में मल जल से विषैली भारी धातुओं का अवशोषण घटने से ऐसा होता है।

Abstract

Effect of sewage enriched with iron on the growth of spinach and uptake of heavy metals. *By* S. G, Misra, Arun Kumar Singh, Dinesh Mani and Devi Dayal Pandey, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad.

The object of the paper is to find out the effect of the sewage enriched with iron on the growth of spinach and uptake of heavy metals under field condition.

Two doses of iron (20 and 40) were added to soil and then irrigation was done with sewage water. It was observed that the growth and biomass yield of spinach increased with increasing doses of iron. This may be due to reduced uptake of toxic metals from sewage due to the presence of iron and organic matter.

यह भलीभांति ज्ञात हो चुका है कि वाहित मल जल एवं तथा अवमल में फसलों के लिए आवश्यक पोषक तत्व नाइट्रोजन तथा फास्फोरस के अतरिक्त कुछ भारी धातुएँ भी पायी जाती हैं जो मिट्टी में एकत्रित होने पर मृदा के धात्विक प्रदूषण का कारण बनती हैं। साथ ही पौधों द्वारा उद्ग्रहीत किये जाने से उनकी वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव डालती हैं। मल, जल में कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति से ऐसे जल से सिंचाई करने पर मिट्टी के कार्बनिक पदार्थ की मात्रा में वृद्धि होती है। मृदा में कार्बनिक पदार्थ अनेक रूपों में उपयोगी होते हैं। ये भारी धातुओं के निक्षेपण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति में फास्फोरस की प्राप्यता बढ़ती है फलस्वरूप भारी धातुएँ अविलेय रूप में परिवर्तित हो जाती है और पौधों द्वारा इनका उद्ग्रहण नहीं होने पाता है[2]। ऐसा पाया गया कि मृदा पी० एच० 4-8 तक कार्बनिक पदार्थ द्वारा भारी धातुओं की उपलब्धता बढ़ती है परन्तु कार्बनिक पदार्थ की अधिकता होने पर इनकी उपलब्धता में कमी आती है[3]। कार्बनिक पदार्थ लौह आक्साइड तथा मैंगनीज आक्साइड के साथ क्रिया करके संकर का निर्माण करते हैं जो भारी धातुओं के आयनों के लिए मुख्य शोषक का काम करते हैं[4]।

प्रस्तुत अध्ययन में लौह (आयरन) की उपस्थिति में मलजल की सिंचाई करने पर पालक की बढ़वार, उपज तथा भारी धातुओं के उद्ग्रहण पर पड़ने वाले प्रभाव को दिखाया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिए शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के कृषि फार्म को चुना गया जिसकी सिंचाई 15 वर्षों से वाहित मल जल द्वारा की जा रही है। हमने इस प्रयोग के लिए पालक को सूचक फसल के रूप में चुना। प्रयोग के लिए यादृच्छिक विधि से 1×1 मी॰ के प्लाट बनाकर उपचार किया। हमने आयरन के स्रोत के रूप में आयरन सल्फेट की दो विभिन्न मात्राएँ (20 पी पी एम तथा) 40 पी॰ पी॰ एम), प्रयुक्त कीं। सादे पानी एवं वाहित मल जल से कुल 8 सिंचाइयां की गयीं। पालक की बुवाई 20 कि॰ ग्रा॰ बीज/हे॰ की दर से की गयी। तत्पश्चात् 7 दिन के अन्तराल पर पौधों के बढवार संबंधी प्रेक्षण किये गये। परिणाम सारिणी 1 एवं 2 में अंकित हैं।

प्रयोग किये गये वाहित मल जल का विश्लेषण इस प्रकार है।

1.	पी० एच	7.1—7.6
2.	कार्बनिक पदार्थ (%)	0.68—1.20
3.	विद्युत चालकता (d Sm^{-1})	840—1920
4.	कुल ठोस पदार्थ (मि॰ ग्रा०/ली०)	188—432
5.	नाइट्रेट नाइट्रोजन (मि० ग्र/ली)	0.02—0.075
6.	फास्फेट (मि० ग्रा०/ली०)	0.05—1.4

7. कोडमियम (पी० पी० एम०) 0.52

8. कापर (,,) 0.80

9. जिंक (,,) 8.30

10. आयरन (,,) 10.60

पालक द्वारा उद्ग्रहीत भारी धातुओं की मात्रा विअम्ल निष्कर्ष बनाकर एटामिक एब्जार्प्सन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (AAS) द्वारा ज्ञात की गयी

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न प्रयोगों द्वारा प्राप्त परिणामों का विवरण इस प्रकार है।

सारणी 1

पालक की बढ़वार

उपचार	7 दिन बाद पौधों की ऊँचाई	7 दिन बाद पत्तियों की संख्या	14 दिन बाद पौधों की ऊँचाई	14 दिन बाद पत्तियों की संख्या	21 दिन बाद पौधों की ऊँचाई	21 दिन बाद पत्तियों की संख्या
1. नियंत्रण	3.0	2	4.8	5	6.5	7
2. 20 पी०पी०एम आयरन +सादा जल	3.5	3	5.0	6	7.8	7
3. 20 पी०पी०एम आयरन +मल जल	4.2	3	6.0	6	8 0	8
4. 40 पी०पी०एम आयरन +सादा जल	4.5	3	6.0	7	7.5	9
5. 40 पी०पी०एम आयरन +मलजल	4.8	3	7.0	7	8.5	10
6. 0 पी०पी० एम आयरन +मलजल	4.2	3	6.5	9	7.8	9

उपचार	28 दिन बाद पौधा की ऊँचाई	28 दिन बाद पत्तियों की संख्या	35 दिन बाद पौधों की ऊँचाई	35 दिन बाद पत्तियों की संख्या
7. नियंत्रण	7.3	0	9.2	11
8. 20 प० पी० एम आयरन सादा जल	9.0	19	11.2	13
9. 20 पी०पी० एम आयरन+मलजल	9.0	10	11.0	11
10. 40 पी०पी०एम आयरन+सादा जल	1.0	11	11.0	14
11. 40 पी०पी० एम आयरन+मलजल	11.3	13	13.2	15
12 0 पी०पी० एम आयरन+मलजल	9.0	10	11,3	13

सारणी 2

पालक की उपज

उपचार	ताजा भार (कि ग्रा/मी²)
1. नियंत्रण	0.470
2. 20 पी०पी० एम आयरन+सादा जल	0.483
3. ,, ,, +मल जल	0.573
4. 40 पी०पी० एम०आयरन+सादा जल	0.657
5. ,, ,, +मलजल	1.100
6. 0 पी० पी० एम आयरन+मलजल	0.480

सारिणी 3

फसल द्वारा भारी तत्वों का उद्ग्रहण

उपचार	भारी धातुएँ (पी० पी० एम में) Cd	Fe	Zn	Cu
1. नियंत्रण	0.06	11.4	10.2	4.2
2. 20 पी०पी० एम आयरन+सादा जल	0.07	15.4	12.4	5.4
3. ,, ,, मलजल	0.05	12.0	10.6	3.7
4. 40 पी०पी० एम आयरन+सादा जल	0.06	14.9	13.9	4.2
5 ,, ,, +मल जल	0.04	11.0	10.9	3.9
6. 0 पी०पी०एम आयरन+मल जल	0.08	16.2	14.2	6.2

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 व 2 से पता चलता है कि जिन प्लाटों में मलजल को लौह के साथ समृद्ध करके प्रयोग किया उसमें नियन्त्रण की तुलना में पौधों की वृद्धि एवं बायोमास दोनों अधिक पाया गया। प्रायः सभी प्रेक्षणों के उपरान्त इसी प्रकार के परिणाम प्राप्त हुए।

ज्ञातव्य हो कि पालक द्वारा भारी धातुओं यथा कैडमियम, आयरन, जिंक तथा कापर का उद् ग्रहण भी लौह से समृद्ध किये गये मलजल के प्रयोग करने पर मल जल के अकेले प्रयोग करने की तुलना में मल जल से सिंचाई करने पर कम होता है। भारी धातुओं के उद्ग्रहण में यह कमी 20 पी० पी० एम लौह (आयरन) की अपेक्षा 40 पी० पी० एम लोहे (आयरन) की मात्रा प्रयोग करने के पश्चात् अधिक परिलक्षित होती है। सादे जल से सिंचाई करने पर भी लौह की अधिक मात्रा के साथ भारी तत्वों के उद्ग्रहण में आंशिक कमी आती है।

इसकी विवेचना के रूप में यह कहा जा सकता है कि विगत 20 वर्षों से शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की सिंचाई मलजल से होते रहने के कारण प्रक्षेत्र की मृदा में पर्याप्त मात्रा में कार्बनिक पदार्थ (1.20%) है। यह कार्बनिक पदार्थ मृदा में लौह आक्साइड तथा मैंगनीज आक्साइड के साथ क्रिया करके संकर का निर्माण करते हैं जो भारी धातुओं के आयनों के लिए मुख्य शोषक का काम करते हैं।

निर्देश

1. मिश्र, एस० जी० तथा दिनेश मणि, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1991, **34**, 83-90
2. लीपर, जी० डब्ल्यू० Managing the heavy metals on land. Dekker. New York. 178
3. हुम्से, यू० तथा ब्रूमर जी० In Proc. Environmental effect of organic and inorganic contamination in sewage sludge held on May 25-26, 1982 at Stevenage.
4. जोहसन, के०, Abstract S. I. L. Cong. कोपेन्हागेन, 1977, 133

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर अनुक्रम की (B) (C,1) संकलनीयता

बी० पी० सिंह तथा एम० पी० सचान
गणित विभाग, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवा-486 001, (म० प्र०)

(प्राप्त—फरवरी 2, 1995)

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने पर्याप्त शिथिल प्रतिबन्धों के अन्तर्गत संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर अनुक्रम $\{aA_n(x)\}$ की $(B)(C, 1)$ संकलनीयता पर दो प्रमेय स्थापित किए हैं।

Abstract

The (B)(C, 1) summability of conjugate derived Fourier sequence. *By* B. P. Singh and M. P. Sachan, Department of Mathmatics, Government Model Science College Rewa-486 001 (M. P.).

In the present paper, the authors have established a pair of theorems on the $(B)(C, 1)$ summability of a conjugate derived Fourier sequence under sufficiently relaxed conditions.

1. परिभाषाएं तथा संकेतन

एक अनन्त अनुक्रम $\{u_n\}$ दिया होने पर, यदि

$$t_n = e^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \sigma_n \to S, \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty, \tag{1.1}$$

जहाँ S सान्त है तथा $\{\sigma_n\}$ अनुक्रम $\{_n u\}$ का $(C, 1)$ रूपान्तर प्रदर्शित करता है, तो अनुक्रम $\{u_n\}$, S के लिए $(B)(C, 1)$ माध्य द्वारा संकलनीय अथवा सरलतापूर्वक संकलनीय $(B)(C, 1)$ कहलाता है।

मान लिया कि आवर्त 2π के साथ आवर्ती तथा अन्तराल $(-\pi,\pi)$ में समाकलनीय (L) फलन $f(x)$ की फोरियर श्रेणी यह है :—

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\equiv\sum_{0}^{\infty}A_n(x). \tag{1.2}$$

फोरियर श्रेणी (1.2) की प्रथम अवकलित अथवा व्युत्पन्न श्रेणी निम्नलिखित है :—

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx)\equiv\sum_{1}^{\infty}nB_n(x) \tag{1.3}$$

यह $f(x)$ की व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी कहलाती है किन्तु इसका फोरियर श्रेणी होना आवश्यक नहीं होता है।

श्रेणी

$$\sum_{1}^{\infty}n(A_n\cos nx+b_n\sin nx)\equiv\sum_{1}^{\infty}nA_n(x), \tag{1.4}$$

व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी (1.3) की संयुग्मी श्रेणी है। इसे $f(x)$ की संयुग्मी व्यु पन्न फोरियर श्रेणी कहते हैं, यद्यपि इसका भी फोरियर श्रेणी होना आवश्यक नहीं होता है।

संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी (1.4) के पदों का अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ "संयुग्मी व्युत्पन्न फोरियर अनुक्रम" कहलाता है, ठीक उसी प्रकार जैसे व्युत्पन्न फोरियर श्रेणी (1.3) के पदों का अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ "व्युत्पन्न फोरियर अनुक्रम" कहा जाता है।

हम निम्नलिखित संकेतनों का स्वच्छन्द प्रयोग करेंगे :—

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2S$$

$$\psi(t)=f(x+t)-f(x-t)-l$$

$$\Phi(t)=\int_0^t|\phi(u)|\,du$$

$$h(n,t)=\sum_{r=1}^{n}\frac{r\cos rt}{n}$$

2. प्रस्तावना—फोरियर श्रेणी की बोरेय संकलनीयता का परिचय कराते हुए, हार्डी तथा लिटिलवुड[1] ने सिद्ध किया :—

प्रमेय A. यदि

$$\phi(t)=o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t\to o, \tag{2.1}$$

तो $f(x)$ की फोरियर श्रेणी संकलनीय (B) होती है।

फोरियर श्रेणी की बोरेल संकलनीयता पर साहनी[2] ने प्रमेय B स्थापित किया :—

प्रमेय B यदि

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du=o\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t\to o, \tag{2.2}$$

तो $f(x)$ की फोरियर श्रेणी S के लिए संकलनीय (B) होती है।

उपर्युक्त प्रमेयों के परिणामों को अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ की $(B)(C, 1)$ संकलनीयता के लिए प्रसारित किया जाना अपेक्षित है। इसी उद्देश्य से हम यहाँ निम्नलिखित प्रमेय स्थापित करेंगे :—

प्रमेय 1. यदि प्रतिबन्ध (2.1) सन्तुष्ट हो तो अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ शून्य के लिए संकलनीय $(B)(C, 1)$ होता है।

प्रमेय 2. यदि प्रतिबन्ध (2.2) सन्तुष्ट हो, तो अनुक्रम $\{n(A_n(x)\}$ शून्य के लिए संकलनीय $(B)(C, 1)$ होता है।

3. प्रमेयिकाएँ—हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :—

प्रमेयिका 1.

$$\int_0^{\pi} h(n, t)\, dt=o$$

उपपत्ति—हमें प्राप्त है—

$$\int_0^{\pi} h(n, t)\, dt=\int_0^{\pi}\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{r\cos rt}{n}\right\}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{r\cos rt}{n}\,dt$$

क्योंकि श्रेणी समरूप से अभिसारी है।

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} \left[\sin rt \right]_0^{\pi} = 0$$

प्रमेयिका 2.

$$h(n, t) = \left[\frac{\sin nt}{2 \tan t/2} - \frac{\sin^2 nt/2}{2n \sin^2 t/2} \right] + \frac{\cos nt}{2}$$

उपपत्ति—हम पाते हैं—

$$nh(n, t) = \sum_{r=1}^{n} r \cos rt = \frac{d}{dt} \sum_{r=1}^{n} \sin rt$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\cos (r-\frac{1}{2}) t - \cos (r+\frac{1}{2})t}{2 \sin t/2} \right\} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\cos t/2 - \cos (n+\frac{1}{2}) t}{2 \sin t/2} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\cos t/2 \, (1-\cos nt)}{2 \sin t/2} + \frac{\sin nt}{2} \right]$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 t/2 \left(\sin^2 \frac{nt}{2} \right) + \frac{n \cos t/2 \sin nt}{2 \sin t/2} + \frac{n \cos nt}{2}$$

$$= \left[\frac{n \sin nt}{2 \tan t/2} - \frac{\sin^2 (nt/2)}{2 \sin^2 t/2} \right] + \frac{n \cos nt}{2}$$

इसमें प्रमेयिका स्थापित हो जाती है।

4. अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ का $(C, 1)$ रूपान्तर

अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ का $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n इससे प्राप्त होता है :—

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(t) \left[\frac{\sin nt}{t} - \frac{2 \sin^2 (nt/2)}{nt^2} \right] dt + o(1). \tag{4.1}$$

उपपत्ति—हमें प्राप्त है—

$$nA_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t)\} (n \cos nt) \, dt$$

$\{nA_n(x)\}$ का $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n द्वारा निरूपित करते हुए हम पाते हैं—

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)+f(x-t)\}\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{r\cos rt}{n}\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)+f(x-t)\}h(n, t)\,dt \qquad (4.2)$$

किन्तु प्रमेयिका 1 से

$$o = \int_0^{\pi} h(n, t)\,dt \qquad (4.3)$$

अब (4·3) को $(2S/\pi)$ से गुणा करने तथा इस प्रकार प्राप्त परिणाम को (4.2) से घटाने पर हम प्राप्त करते हैं—

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)+f(x-t)-2S\}h(n, t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)h(n, t)\,dt$$

तदनन्तर प्रमेयिका 2 का प्रयोग करने पर हमें मिलता है—

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\left[\left\{\frac{\sin nt}{2\tan t/2}-\frac{\sin^2(nt/2)}{2n\sin^2 t/2}\right\}+\frac{\cos nt}{2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\left[\frac{\sin nt}{\tan t/2}-\frac{\sin^2(nt/2)}{n\sin^2 t/2}\right]dt+o(1)$$

रीमाँ-लेबेग प्रमेय के सम्प्रयोग से ।

अन्ततः क्योंकि

$$\left[\phi(t)\left(\frac{1}{\tan t/2}-\frac{2}{t}\right)\right]$$

अंतराल (o, π) में समाकलनीय (L) है तथा

$$\left[\frac{1}{\sin^2 t/2}-\frac{4}{t^2}\right]=O(1),$$

अत: उपर्युक्त समाकल के प्रथम भाग में रीमाँ-लेबेग प्रमेय का प्रमेय करने तथा द्वितीय भाग के हर में u के प्रस्तुत होने से अंतिम फल इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(t) \left[\frac{\sin nt}{t} - \frac{2 \sin^2 (nt/2}{nt^2}\right] dt + o(1). \tag{4.4}$$

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

(4.1) अथवा (4.4) से अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ का $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(t) \left[\frac{\sin nt}{t} - \frac{2 \sin^2 (nt/2)}{nt^2}\right] dt + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(t) \frac{\sin nt}{t} dt$$

$$- \frac{2}{n\pi} \left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right] \phi(t) \frac{\sin^2 (nt/2)}{t^2} dt + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(t) \frac{\sin nt}{t} dt - \frac{2}{\pi} [J_1 + J_2 + J_3] + o(1) \text{ माना,}$$

जहाँ टिशमार्श[3] का अनुसरण करते हुए $\delta > o$ को इतना छोटा चुना गया है कि प्रतिबन्ध (2.2) सन्तुष्ट होता है, जब $t \leqslant \delta$.

प्रतिबन्ध (2.2) के सम्प्रयोग से—

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{n} \int_0^{1/n} |\phi(t)| O(n^2)\, dt = O(n) \int_0^{1/n} |\phi(t)| dt = o(1)$$

खण्डश: समाकलन तथा (2.2) से—

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{n} \int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t^2} O(1)\, dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) \left[o\left(\frac{1}{t}\right) + 2 \int o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty.$$

स्थिर प्राप्त होने से—

$$|J_3| \leqslant \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{n\delta^2} \int_{\delta}^{\pi} |\phi(t)| dt$$

$$=\left(\frac{1}{n\delta^2}\right) O(1)=o(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty,$$

समाकल $\int|\phi(t)|dt$ के सातत्यांश से—

इस प्रकार हमने दर्शाया है कि—

$$\sigma_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi(t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1)$$

अब σ_n के बोरेल रूपान्तर अर्थात् अनुक्रम $\{nA_n(x)\}$ के $(B)\,(C,1)$ रूपान्तर को $(BC)_p$ से निरूपित करते हुए परिभाषा तथा बोरेल संकलन की नियमितता से हम पाते हैं—

$$(BC)_p=\frac{e^{-p}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\sin nt\right] nt+o(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t}\,\frac{\sin(p\sin t)}{\exp\{p(1-\cos t)\}}\,dt+o(1)$$

पुन: हम लिखते हैं—

$$(BC)_p=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1/p}+\int_{1/p}^{1/p^\alpha}+\int_{1/p^\alpha}^{\pi}\right]\frac{\phi(t)}{t}\,\frac{\sin(p\sin t^2)}{\exp(2p\sin^2 t/2)}\,dt+o(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}[M_1+M_2+M_3]+o(1), \text{ माना, जहाँ } o<\alpha<1/2. \qquad (5.1)$$

परिकल्पना (2.2) के सम्प्रयोग से—

$$|M_1|\leqslant\int_0^{1/p}\frac{|\phi(t)|}{t}\,O(pt)=O(p)\int_0^{1/p}|\phi(t)|dt=o(1) \qquad (5.1)$$

खण्डश: समाकलन तथा (2.2) का प्रयोग करने से—

$$|M_2|=O(1)\int_{1/p}^{1/p^\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}\,dt$$

$$=O(1)\left[o\left(\frac{1}{\log 1/t}\right)+\int o\left(\frac{1}{t\log 1/t}\right)dt\right]_{1/p}^{1/p^\alpha}$$

$$=o(1)+o\left[-\log\log(1/t)\right]_{1/p}^{1/p^\alpha}$$

$$=o(1)+o\left(\log\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p\to\infty, \text{ क्योंकि } o<\alpha<\tfrac{1}{2}.$$

पुनश्च

$$|M_3|\leqslant\int_{1/p^\alpha}^{\pi}\frac{|\phi(t)|}{t\exp(2p\sin^2 t/2)}\,dt$$

$$=O\left[\frac{p^{2\alpha}}{\exp\left\{2p\sin^2\left(\frac{1}{2p^\alpha}\right)\right\}}\right]\int_{1/p^\alpha}^{\pi}|\phi(t)|\,dt$$

$$=O\left[\frac{p^{2\alpha}}{\exp\left\{\frac{2p^{1-2\alpha}}{\pi 2}\right\}}\right]O(1)$$

$$=o(1)O(1)=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p\to\infty, \tag{5.4}$$

समाकल $\int|\phi(t)|dt$ के सातत्यांश से तथा $o<\alpha<\frac{1}{2}$ होने से । अन्ततः (5.1), (5.2), (5.3) तथा (5.4) के प्रकाश में स्पष्ट है कि

$$(BC)_p=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p\to\infty.$$

इस प्रकार प्रमेय 2 की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

6. **प्रमेय 1 की उपपत्ति**—चूँकि प्रमेय 1 का प्रतिबन्ध (2.1) प्रमेय 2 के प्रतिबन्ध (2.2) से प्रबलतर अथवा तीव्रतर है, अतः (2.2) के अन्तर्गत स्थापित प्रमेम 2, प्रमेय 1 का सार्वीकृत रूप है । फलतः प्रमेय 2 की उक्तानुसार स्थापना के साथ ही प्रमेय 1 भी स्थापित हो जाता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डॉ० आर० बी० मिश्रा, प्राध्यापक गणित, अवधेश प्रतापसिंह विश्वविद्यालय, प्राध्यापन विभाग, रीवा ने लेखकों को जो व्यक्तिगत प्रोत्साहन एवं सहयोग दिया है, इसके लिए लेखक उनके हृदय से आभारी हैं ।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच० तथा लिटिलवुड, जे०ई०, जर्न० लन्दन मैथ०सोसा०, 1932, 7, 252-256.

2. साहने, बी० एन०, बोल० यू० एम० आई०, 1961, **16**, 44-47.

3. टिशमार्श, ई० सी०, दी थोरी ऑफ फंक्शन्स, ऑक्सफोर्ड, 1961, 414 तथा 415-416.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 3, 1995

विभिन्न स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक का हिस्टोलोजिकल अध्ययन

केशव कुमार

एनाटमी विभाग, चिकित्सा विज्ञान संस्थान, काशी हिन्दू विश्व विद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 2, 1995]

सारांश

विभिन्न स्रोतों से प्रौढ़ आयु वर्ग के मनुष्य, भैंस, सुअर, बकरी, कुत्ता, खरगोश और चूहा में से प्रत्येक के 100 हृदय (कुल 700) एकत्र किये गये। एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक का ऊतक हृदय से उनके उद्गम के समीप लिया गया तथा 10 प्रतिशत फार्मेलीन में प्रारक्षित किया गया। प्रासेसिंग के पश्चात् पैराफिन ब्लाक तैयार किये गये और रोटरी माइक्रोटोम की सहायता से 10 माइक्रान मोटाई के सेक्शन काटे गये जिन्हें इन धमनियों की दीवाल की विभिन्न पर्त्तों में प्रत्यास्थ तथा कोलैजेन तन्तुओं के घनत्व के तुलनात्मक अध्ययन के लिये ओर्सीन तथा वांजीसन्स पिक्रोफुचसिन से रंजित किया गया।

सभी स्तनधारियों में एसेंडिंग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की आन्तरिक पर्त्त में+, मध्यपर्त्त में++++तथा बाह्य पर्त्त में+++प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व पाया गया जबकि कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व आन्तरिक पर्त्त में+, मध्यपर्त्त में++ और बाह्यपर्त्त में++++था। यह निर्धारित किया गया कि स्तनधारियों में एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की प्रत्यास्थता उनके आकार पर आधारित न होकर उनकी मध्य पर्त्त में स्थित प्रत्यास्थ तन्तुओं के घनत्व पर निर्भर करती है।

Abstract

Histological study of ascending aorta and pulmonary trunk in different mammals. *By* Keshaw Kumar, Department of Anatomy, Institute of Medical Sciences. Banaras Hindu University, Varanasi.

Hearts of human, buffalo, pig, goat, dog, rabbit and rat (100 of each) were procured from various sources. These mammals were of adult age group belonging

to different orders of class mammalia. Tissue of ascending aorta and pnlmonary trunk was taken immediately distal to their commencement to be preserved in 10% formal in solution. Paraffin blocks were prepared after processing and sections of 10 micron thickness were cut with the help of rotary microtome. Sections were stained with Orcein and Van Gieson's picrofuchsin to compare density of elastic and collagen fibres respectiveiy in the layers of ascending aorta and pulmonary trunk of mammals.

Density of elastic fibres was observed ++++ in tunica media, +++ in tunica adventitia and + in tunica intima of ascending aorta as well as pulmonary trunk in all the mammals while density of collagen fibres was observed ++++ in tunica adventitia, ++ in tunica media where it was seen dispersed between smooth muscle fibres and + in tunica intima of ascending aorta as well os pulmonary trunk of all the mammals.

It was concluded that elasticity of ascending aorta and pulmonary trunk depends on the density of elastic fibres in their tunica medica and not an their size in the different mammals.

यद्यपि बाउसेक[1], डफ इत्यादि[2], फास्टर[3] गेरिटी तथा क्लिफ[4], ग्रे इत्यादि[5], हाइस्ट इत्यादि[6], मेकडोनाल्ड[7], हास[8], कीच[9], केशव कुमार[10,11], लैटिनेन[12], अहमद[13], पीस[14], राबर्ट[15], सैक्सटान[16], और स्मिथ इत्यादि[17] द्वारा अतीत मे एसेंडिग एओर्टा अथवा पल्मोनरी ट्रंक से सम्बन्धित विभिन्न प्रकार के हिस्टोलोजिकल अध्ययन किये जा चुके हैं परन्तु अभी तक किसी भी अन्वेषक द्वारा एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की पर्त्तों में प्रत्यास्थ और कोलैजेन तन्तुओं का तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया गया है। अतः प्रौढ़ वायुवर्ग के विभिन्न स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की बाह्य, मध्य तथा आन्तरिक पर्त्तों में प्रत्यास्थ तन्तुओं और कोलैजैन तन्तुओं के घनत्व की तुलना करने की दृष्टि से वर्तमान अध्ययन को संचालित किया गया।

प्रयोगात्मक

विभिन्न स्रोतों से मनुष्य, भैंस, सुअर, बकरी, कुत्ता, खरगोश और चूहा में से प्रत्येक के 100 हृदय (कुल 700) एकत्र किये गये। ये सभी स्तनधारी प्रौढ आयु वर्ग के थे और क्लास मैमेलिया के निम्नलिखित क्रमों (अर्डर्स) से सम्बन्धित थे।

1. रोडेन्शिया जैसे चूहा
2. लैगोमार्फा जैसे खरगोश
3. कार्नीवोरा जैसे कुत्ता
4. आर्टियोडैक्टाइला जैसे भैंस, सुअर, बकरी
5. प्राइमेट्स जैसे मनुष्य

एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक का ऊतक हृदय से इनके उद्गम के समीप लिया गया तथा 10 प्रतिशत फार्मलीन के घोल में प्रारक्षित किया गया। प्रासेसिंग के पश्चात् पैराफिन ब्लाक तैयार किये गये और रोटरी माइक्रोटोम की सहायता से 10 माइक्रान मोटाई के सेक्शन काटकर उन्हें ओर्सीन से (प्रत्यास्थ तन्तुओं के लिये) तथा वांजीसन्स पिक्रोफुक्सिन से (कोलैजेन तन्तुओं के लिये) रंजित किया गया। तत्पश्चात् सूक्ष्मदर्शी की सहायता से प्रत्येक धमनी की सभी पर्त्तों में प्रत्यास्थ एवं कोलैजेन तन्तुओं के घनत्व का निरीक्षण किया गया। धमनियों की दीवाल की आन्तरिक, मध्य तथा वाह्य पर्त्तों को प्रत्यास्थ और कोलैजेन तन्तुओं के घनत्व के अनुसार प्रत्येक रंजक (स्टेनिंग) के लिये +, ++, +++, ++++ श्रेणीबद्ध किया गया जहाँ+न्यूनतम घनत्व तथा ++++ अधिकतम घनत्व का प्रतिनिधित्व करता था। समस्त निरीक्षण एक ही निरीक्षक द्वारा आँख से देखकर किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

1. प्रत्यास्थ तन्तु-(सारणी—1)

प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व सभी स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की आन्तरिक पर्त्त में+चित्र-1,2) मध्यपर्त्त में ++++ चित्र-1,2,4,5) और वाह्यपर्त्त में +++ (चित्र-4,5) पाया गया।

2. कोलैजेन तन्तु-(सारणी—2)

कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व सभी स्तनधारियों के एसेंडिग एओटा तथा पल्मोनरी ट्रंक की वाह्यपर्त्त में ++++ (चित्र—6), मध्यपर्त्त में ++ (चित्र—3,6) और आन्तरिक पर्त्त में + (चित्र—3,6) पाया गया।

समस्त स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की वाह्यपर्त्त में कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व ++++ तथा प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व +++ था (चित्र—4,5,6) जबकि मध्यपर्त्त में प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व ++++ और कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व ++ था (चित्र—1,2,3, 4,5,9) केवल आन्तरिक पर्त्त में प्रत्यास्थ और कोलैजेन दोनों ही प्रकार के तन्तुओं का घनत्व + था (चित्र—1,2,3,6)

किसी भी धमनी का प्रत्यास्थ अथवा मांसल होना उस धमनी द्वारा सम्पादित किये जाने वाले कार्य पर निर्भर करता है न कि उस धमनी की दीवाल की मोटाई अथवा गुहा की परिधि पर (केशव कुमार[11]) क्योंकि वर्तमान अध्ययन के दौरान भी यह देखने में आया कि विभिन्न स्तनधारियों में एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई और गुहा की परिधि में अत्यधिक भिन्नता थी परन्तु जहाँ तक उनकी बाह्य, मध्य तथा आन्तरिक पर्त्तों में प्रत्यास्थ और कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व का प्रश्न है, इन धमनियों की हिस्टोलोजिकल संरचना सभी स्तनधारियों में एकसमान थी। वर्तमान अध्ययन से एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक में प्रत्यास्थ तन्तुओं के सम्बन्ध में प्राप्त परीक्षण परिणाम अतीत में बाउसेक इत्यादि, डफ इत्यादि, गेरिटी और बिलफ हाडस्ट इत्यादि अहमद राबर्ट स्मिथ इत्यादि, भास्टर हाम कीच सैक्सटान लेटिनेन और पीस द्वारा प्राप्त परीक्षण परिणामों से समानता रखते हैं।

सारणी 1

स्तनधारियों के एसेंडिंग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक में प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व

स्तनधारी	एसेंडिंग एओर्टा			पल्मोनरी ट्रंक		
	आन्तरिक पर्त	मध्य पर्त	बाह्य पर्त	आन्तरिक पर्त	मध्य पर्त	बाह्य पर्त
मनुष्य	+	++++	+++	+	++++	+++
भैंस	+	++++	+++	+	++++	+++
सुअर	+	++++	+++	+	++++	+++
बकरी	+	++++	+++	+	++++	+++
कुत्ता	+	++++	+++	+	++++	+++
खरगोश	+	++++	+++	+	++++	+++
चूहा	+	++++	+++	+	++++	+++

सारणी—2

स्तनधारियों के एसेंडिंग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक में कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व

स्तनधारी	एसेंडिए एओटा			पल्मोनरी ट्रंक		
	आन्तरिक पर्त	मध्य पर्त	बाह्य पर्त	आन्तरिक पर्त	मध्य पर्त	बाह्य पर्त
मनुष्य	+	++	++++	+	++	++++
भैंस	+	++	++++	+	++	++++
सुअर	+	++	++++	+	++	++++
बकरी	+	++	++++	+	++	++++
कुत्ता	+	++	++++	+	++	++++
खरगोश	+	++	++++	+	++	++++
चूहा	+	++	++++	+	++	++++

एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक दोनों की ही आन्तरिक और वाह्य पर्तें इनकी मध्यपर्त्त की तुलना में बहुत पतली होती हैं अतः यह स्पष्ट हैं कि उपर्युक्त दोनों धमनियों की दीवाल की सम्पूर्ण मोटाई ज्यादातर मध्यपर्त्त द्वारा ही निर्मित होती है। एसेंडिग एओर्टा की दीवाल पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की तुलना में तीन गुना अधिक मोटी होती है[11] अतः यह भी कहा जा सकता है कि एसेंडिग एओर्टा की मध्यपर्त्त पल्मोनरी ट्रंक की मध्यपर्त्त की तुलना में तीनगुना अधिक मोटी होती है। क्योंकि सभी स्तनधारियों की एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की मध्यपर्त्त में प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व एक समान (++++) था अतः एसेंडिग एओटा की प्रत्यास्थता पल्मोनरी ट्रंक की प्रत्यास्थता के समान होती है। प्रत्यास्थ धमनियाँ सदैव वृहद आकार की नहीं होती हैं जैसा कि चिकित्सा साहित्य की मानक पुस्तक 'ग्रेज एनाटमी' में भी वर्णित है। उदाहरण के लिये खरगोश की एसेंडिग एओर्टा भैंस की एसेंडिग एओर्टा की तुलना में बहुत ही छोटे आकार की होती है परन्तु फिर भी भैंस और खरगोश दोनों की ही एसेंडिग एओर्टा प्रत्यास्थ धमनी की श्रेणी में आती है क्योंकि इन दोनों ही स्तनधारियों की एसेंडिग एओर्टा की मध्यपर्त्त में प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व एकसमान (++++) होता है। अतः "ग्रेज एनाटमी" में उल्लिखित तथ्य कि प्रत्यास्थ धमनियाँ सदैव वृहद आकार की होती हैं, सही प्रतीत नहीं होता है। वास्तव में किसी भी धमनी का प्रत्यास्थ होना उस धमनी द्वारा किये जाने वाले कार्य पर निर्भर करता है न कि उसके वृहद आकार पर। चाहे भैंस हो अथवा खरगोश दोनों के ही एसेंडिग एओर्टा द्वारा एक ही प्रकार का कार्य सम्पादित किया जाता है और वह कार्य है हृदय के सिस्टोल के समय प्रसरित होना तथा हृदय के डायास्टोल के समय अपनी सामान्य दशा में आ जाना ताकि रक्त को आगे की ओर ढकेला जा सके। इस प्रकार के कार्य के लिये मध्यपर्त्त में प्रत्यास्थ तन्तुओं के अधिकतम घनत्व (++++) की आवश्यकता होती है जो सभी स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक में एक समान होती है।

एसेंडिग एओर्टा अथवा पल्मोनरी ट्रंक की प्रत्यास्थता इन धमनियों की मध्यपर्त्त में स्थित प्रत्यास्थतन्तुओं के प्रति आवर्धित क्षेत्र में घनत्व के समानुपाती होती हैं। मध्यपर्त्त के प्रति आवर्धित क्षेत्र में प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व प्रत्यास्थ धमनी के आकार की उपेक्षा करते हुये एकसमान रहता है क्योंकि मनुष्य, भैंस, सुअर, बकरी, कुत्ता, खरगोश और चूहा में जहाँ तक एसेंडिग एओर्टा अथवा पल्मोनरी ट्रंक के आकार का प्रश्न है उसमें अत्यधिक भिन्नता होती है। विभिन्न स्तनधारियों में किसी भी प्रत्यास्थ धमनी द्वारा सम्पादित किये जाने वाला कार्य सदैव एक जैसा ही रहता है केवल उसका आकार (दीवाल की मोटाई तथा गुहा की परिधि) बदला करता है अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि "किसी भी स्तनधारी की प्रत्यास्थ धमनी का आकार उस स्तनधारी के आकार पर निर्भर करता है परन्तु उसकी मध्यपर्त्त में स्थित प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व उस धमनी द्वारा सम्पादित किये जाने वाले कार्य पर निर्भर करता है।

हृदय का तन्तुमय कंकाल (फाइब्रस स्केलेटन) एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की मध्यपर्त्त में इन धमनियों की लम्बाई की दिशा में दौड़ने वाले कोलैजेन तन्तुओं के रूप में निरन्तरता बनाये रखता है। ये कोलैजेन तन्तु मध्यपर्त्त में स्थित अनैच्छिक मांस तन्तुओं के मध्य ++ घनत्व में वितरित रहते

हैं तथा उन्हें सहारा प्रदान करते हैं। आन्तरिक पत्त में कोलैजेन तन्तु + घनत्व में रहते हुए भी इसे सहारा प्रदान करते हैं। एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की वाह्य पत्त हृदय की वाह्यपत्त (एपिकार्डियम) का तारतम्य होने के कारण तन्तुमय और वसामय होती है तथा कोलैजेन तन्तुओं का ++++ घनत्व प्रदर्शित करती है। पीस ग्रे इत्यादि और स्मिथ इत्यादि द्वारा एसेंडिंग एओर्टा अथवा पल्मोनरी ट्रंक में कोलैजेन तन्तुओं के सम्बन्ध में वर्णित परीक्षण परिणाम वर्तमान अध्ययन द्वारा प्राप्त परीक्षण परिणामों से समानता रखते हैं।

चित्रों का स्पष्टीकरण

चित्र संख्या—1

आन्तरिक पत्त में + तथा मध्य पत्त में ++++ प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व दर्शाते हुये मनुष्य के एसेंडिंग एओर्टा की अनुप्रस्थ काट (ओर्सीन × 100)

चित्र संख्या—2

आन्तरिक पत्त में + तथा मध्य पत्त में ++++ प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व दर्शाते हुये भैस के पल्मोनरी ट्रंक की अनुप्रस्थ काट (ओर्सीन × 100)

चित्र संख्या—3

आन्तरिक पत्त में + तथा मध्यपत्त में ++ कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व दर्शाते हुए सुअर के पल्मोनरी ट्रंक की अनुप्रस्थ काट (वांजीसन्स पिक्रोफुचसिन × 100)

चित्र संख्या—4

वाह्यपत्त में +++ तथा मध्यपत्त में ++++ प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व दर्शाते हुये बकरी के पल्मोनरी ट्रंक की अनुप्रस्थ काट (ओर्सीन × 100)

चित्र संख्या—5

वाह्यपत्त में +++ तथा मध्यपत्त में ++++ प्रत्यास्थ तन्तुओं का घनत्व दर्शाते हुये कुत्ते के एसेंडिंग एओर्टा की अनुप्रस्थ काट (अर्सीन × 100)

चित्र संख्या—6

आन्तरिक पत्त में + पध्यपत्त ++ तथा वाह्य पत्त में ++++ कोलैजेन तन्तुओं का घनत्व दर्शाते हुये खरगोश के एसेंडिंग एओर्टा की अनुप्रस्थ काट (वांजीसन्स पिक्रोफुचसिन × 100)

निर्देश

1. बाउसेक, आर० टाकाशिटा जे० आर० तथा फोजाको आर०, अमेरिकन जनरल आफ एनाटमी 1963.

2. डफ, जी० एल०, मेनमिलन जी० सी० तथा रिट्ची ए० सी लीजन्स आफ द एओर्टा डिमान्स्ट्रेड बाई सरफेस टेकनिक इन रैबिट्स फेड कोलीस्टेराल तुगेदर विद अमेरिकन जनरल आफ पैथोलोजी 1957, 33 : 845-873.

3. फास्टर, एल०, एल० जनरल आफ मेडिकल रिसर्च, 1909, 2 : 297-311.

4. गेरिटी, आर० जो० तथा विलफ डबल्यू० जे०, एक्सपेरिमेन्टल मालीकुलर पैथालोजी, 1972, 16, 382-402.

5. ग्रे, एस० एच०, नैन्डलर, एफ० पी०, ब्लैंचे, जे० ओ०, बुकनर जे० तथा ब्लुमेन्थाल, एच० टी०, इन आर्च० पैथ, 1953, 56 : 238-253.

6. हाउस्ट, एम० डी०, आर० एच०, मोरे, एस० ए०, वेन्कास्मे तथा जे० वी० बालिस, एक्सपेरिमेन्टल मालीक्यूलर पैथोलोजी०, 4 : 508-524.

7. मेक डोनाल्ड, डी० ए०, Proc. roy. Soc. B. 1957, 146 : 541-551.

8. हास, जी० एम०, आर्च० पैथ० 1143, 35 : 29-57.

9. कीच, एम० के० जे०, बायोफिज० बायोकेम० साइटाल० 1960, 7 : 533-538.

10. केशव कुमार, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1993, 36, 2 120.

11. केशव कुमार, विज्ञान, 1993, अप्रैल 26-29-

12. लैटिनेन, ई० एक्टापैथ० माइक्रोवियाल०, 1963 Scand. Scand. Suppl. 167.

13. अहमद, एम० एम०, एक्टा एनाट०, 1967, 66, 45-58.

14. पीस, डी० सी० एनाटामिकल० रिकार्ड०, 1955, 121 : 350-357.

15, राबर्ट, सी० बक, अमेरिकन जनरल आफ एनाटमी०, 1979, 156 : 1-13.

16. सैक्सटान, जे० ए०, आर्च० पैथ० 1942, 34 : 262-274.

17. स्मिथ, सी० सेटनर, एम० एम० तथा वांग, एच० पी०, एनाटामिकल रिकार्ड०, 1951, 109 : 13-39.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, ज़ाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

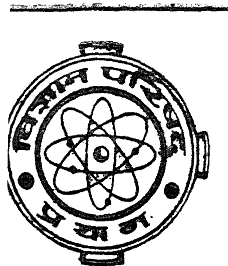
प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 38 October 1995 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग

विषय-सूची

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

परागोलीय श्रेणी की परम चेजारो संकलनीयता के सम्बद्ध में

आलोक वर्मा तथा अवनीश कुमार साओ

गणित विभाग, शासकीय विज्ञान स्नातकोत्तर महाविद्यालय बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 3, 1994]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य परागोलीय श्रेणी की परम चेजरो संकलनीयता के लिए कतिपय नवीन परिणामों को स्थापना करना है।

Abstract

On absolute Cesaro summability of ultrashperical series. *By* Alok Verma and Awanish Kumar Sao, Government Science P. G. College, Bilaspur (M. P.)

The absolute Cesaro summability of the ultraspherical series was studied in detail by Kogbetliantz.[4] Later on some of his results were generalised by Obrechkoff.[15] In this paper some new results on the $|c, \alpha+\lambda|$ summability of the ultraspherical series have been obtained in the case $1>\alpha>\lambda$, being the order of the ultraspherical polynomials involved.

माना कि $f(\theta, \phi)$ एक फलन है जिसे गोला s पर परास $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, के लिए परिभाषित किया जाता है। इस फलन से सम्बद्ध परागोलीय श्रेणी निम्नवत् है

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \iint_s^{(\lambda)} \frac{P_n(\cos r) f(\theta', \phi') d\sigma'}{[\sin^2 \theta' \sin^2 (\phi-\phi')]^{1/2-\lambda}}, \lambda>0 \tag{1.1.1}$$

जहाँ

$$\cos r = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$$

तथा

$$d\sigma' = \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

गेगेनबाउअर(?) "रागोलीय बहुपदों $P_{n(x)}^{(\lambda)}$ को निम्नलिखित सम्बद्ध द्वारा परिभाषित किया जाता है—

$$[1-2\,xz+z^2]^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty} Z^n P_n^{(\lambda)}(x),\ \lambda>0 \tag{1.1.2}$$

लैप्लास श्रेणी $\lambda=\frac{1}{2}$ के लिए श्रेणी (1.1.1) की विशिष्ट दशा है जबकि यह सीमा $\lambda\to 0$ में एक त्रिकोणमितीय श्रेणी में समानीत हो जाती है क्योंकि

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{n}\cos n\theta,\ n\geqslant 1$$

हम सर्वत्र यह मानकर चलेंगे कि फलन

$$f(\theta',\phi')\,[\sin^2\theta'\sin^2(\phi-\phi')]^{\lambda-1/2} \tag{1.1.3}$$

गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ पर समाकलनीय (L) है और काग्बेतलियांत्ज[4] का अनुसरण करते हुए हम $f(\theta,\phi)$ के सार्वीकृत माध्य मान को निम्नवत् परिभाषित करते हैं

$$f(r)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}{\Gamma(\lambda)2\pi\,(\sin r)^{2\lambda}}\int_{C_r}\frac{f(\theta',\phi')\,d\sigma'}{[\sin^2\theta'\sin^2(\phi-\phi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} \tag{1.1.4}$$

जहाँ समाकल एक लघुवृत्त से साथ साथ लिया जाता है जिसका गोले पर (θ,ϕ) है और जिसकी वक्ररेखीय त्रिज्या r है

(1.1.4) के अनुसार (1.1.1) की श्रेणी निम्नलिखित रूप में समानीत होती है—

$$f(\theta,\phi)\sim\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\int_0^{\pi}f(r)\,(\sin r)^{2\lambda}P_n^{(\lambda)}(\cos r)\,dr$$

$$\equiv\sum_{n=0}^{\infty}A_n \tag{1.1.5}$$

हम लिखते हैं

$$\phi(r)=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}f(r)\sin r^{2\lambda-1}$$

$$\phi_p(x)=\Gamma(p+1)x^{-p}\,\Phi_p(x),\ p\geqslant 0$$

$$\Phi_p(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x(x-t)^{p-1}\phi(t)\,dt$$

$$\Phi_0(x)=\phi(x)$$

$$\Phi_p(x) = \frac{d}{dx}\,\Phi_{p+1}(x),\ -1<p<0$$

तथा

$$\frac{d^p}{dr^p}\left(S_n^{\alpha+\lambda}(r)\right) = S_n^p(r)$$

गुप्ता[2] ने श्रेणी (1.1.1) की परम आबेल संकलनीयता की विवेचना गोले के पृष्ठ पर स्थित एक बिन्दु पर की है। उन्होंने भट्ट[1] के दोनों प्रमेयों को समाहित कर लिया है और एक परवर्ती प्रपत्र में गुप्ता तथा पाण्डेय[3] ने चेजारो संकलनीयता का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य परागोलीय श्रेणी (1.1.1) की परम चेजारो संकलनीयता के लिए कतिपय नवीन परिणामों की स्थापना करना है।

हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $\phi(r)$ (η, π) में परिबद्ध विचरण वाला हो, जहाँ

$$\eta = \frac{\mu}{n^{\Delta}},\ \frac{2\lambda+1}{1+\alpha+\lambda} = \Delta,\ 1>\alpha>\lambda$$

μ बिशाल अचर हो तथा यदि

$$\overline{\Phi_1(t)} \equiv \int_0^t |\phi(r)|\,dr = 0\,[t^{3(\lambda+1/2)-\alpha}]$$

ज्यों-ज्यों $t\to 0$, $1/2\leqslant\lambda<1$ के लिए।

तो श्रेणी (1.1.1) संकलनीय $|C, \alpha+\lambda|$ है।

1.2 प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी—

प्रमेयिका-1

यदि S_n^k द्वारा n^{th} अनुक्रम $\left\{(n+\lambda)\,P_n^{\lambda}\cos r)\right\}$ के $k>1$ वर्ग का nवां चेजारो माध्य दर्शित करे तो $\lambda>0$, तथा $p\geqslant 0$, के लिए, हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{d^p}{dr^p}\left\{S_n^k(r)\right\} = \begin{cases} 0\,(n^{2\lambda+p})\ 0\leqslant r\leqslant\pi \text{ के लिए} \\ 0\left(\dfrac{n^{p+\lambda-k}}{r^{\lambda+k}}\right) 0<r<\pi, \\ \qquad \lambda+1+[p]\geqslant k \text{ के लिए} \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

प्रमेयिका-2

$0<r\leqslant\pi$, के लिए हमारे पास समान रूप से

$$\overset{k}{S_n}(r)=0\,(n^{2\lambda-k})+0\,(n^{-1}) \tag{2.2}$$

1.3 प्रमेय 1 की उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$nA_n=n\,(n+\lambda)\int_0^{\pi}\phi(r)\;\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)\sin r\,dr$$

$$=n\int_0^{\pi}\phi(r)\left[\left\{\frac{d}{dx}\left(\overset{(\lambda)}{P_{n+1}}(x)\right\}-\left\{x\frac{d}{dx}\right)\overset{(\lambda)}{P_n}(x)\right\}\right.$$

$$x=\cos r \qquad x=\cos r$$

$$\left.-\lambda\,\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)\right]\sin r\,dr$$

$$=n\int_0^{\pi}\phi(r)\left[\cos r\frac{d}{dr}\;\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)-\frac{d}{dr}\;\overset{(\lambda)}{P_{n+1}}(\cos r)\right.$$

$$\left.-\lambda\sin r\;\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)\right]dr$$

$$=\int_0^{\pi}\phi(r)\left[(n+\lambda)\cos r\;\frac{d}{dr}\right)\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)$$

$$-\lambda\cos r\frac{d}{dr}\;\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)-(n+1+\lambda)\;\frac{d}{dr}$$

$$\left(\overset{(\lambda)}{P_{n+1}}(\cos r)+(1+\lambda)\;\frac{d}{dr}\right)\overset{(\lambda)}{P_{n+1}}(\cos r)-\lambda(n+\lambda)$$

$$\left.\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)\sin r+\lambda^2\;\overset{(\lambda)}{P_n}(\cos r)\sin r\;\right]d.$$

इस तरह हमें मिलता है

$$\overset{\alpha+\lambda}{T_n}(r)=\int_0^{\pi}\frac{d}{dr}\left\{\overset{\alpha+\lambda}{S_n}(r)\right\}\phi(r)\cos r\,dr$$

$$-\lambda\int_0^{\pi} \sigma_n^{\alpha+\lambda}(r)\phi(r)\cos r\, dr$$

$$-\int_0^{\pi} \frac{d}{dr}\left\{S_{n+1}^{\alpha+\lambda}(r)\right\}\phi(r)\, dr$$

$$+(\lambda+1)\int_0^{\pi} \sigma_{n+1}^{\alpha+\lambda}(r)\phi(r)\, dr$$

$$-\int_0^{\pi} S_n^{\alpha+\lambda}(r)\phi(r)\sin r\, dr$$

$$+\lambda^2\int_0^{\pi} 1_n^{\alpha+\lambda}(r)\phi(r)\sin r\, dr$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6, \text{ माना} \qquad (1.3.1)$$

जहाँ

$$T_n^k(r), S_n^k(r), \sigma_n^k(r) \text{ तथा } 1_n^k r)$$

क्रमशः निम्नलिखित अनुक्रमों की कोटि k के nवें चेजारो को घोषित करते हैं

$$\{nA_n\}, \left((n+\lambda)P_n^{(\lambda)}(\cos r)\right), \left(\frac{d}{dr}P_n^{(\lambda)}(\cos r)\right)$$

तथा

$$\left(P_n^{(\lambda)}(\cos r)\right).$$

प्रमेय को स्थापित करने के लिए हमें इतना ही दर्शाना पर्याप्त है कि

$$\sum n^{-1} \mid T_n^{\alpha+\lambda} \mid<\infty \qquad (1.3.2)$$

सर्वप्रथम हम I_3 पर विचार करेंगे जहाँ

$$I_3=\int_0^{\pi}\phi(r)\, S_{n+1}^{(1)}(r)\, dr$$

$$=\left[\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\right]\phi(r)\, S_{n+1}(r)\, dr$$

$$=I_{3\cdot1}+I_{3\cdot2}, \text{ माना} \qquad (1.3.3)$$

अब

$$I_{3\cdot1}=\int_0^{\eta} \overset{(1)}{S}_{n+1}(r)\phi(r)\,dr$$

$$=\Big[\overset{(1}{S}_{n+1}(r)\Phi_1(r)\Big]_0^{\eta}-\int_0^{\tau}\overset{(2)}{S}_{n+1}(r)\Phi_1(r)\,dr$$

$$=I_{3\cdot1\cdot1}-I_{3\cdot1\cdot2} \text{ माना} \tag{1.3.4}$$

अब

$$I_{3\cdot1\cdot1}=0\left[\frac{n^{1-\alpha}}{2\lambda+\alpha}\,r^{(\lambda+1/2)-\alpha}\right]_0^{\eta}$$

$$0\left[n^{1-\alpha}\,r^{-2\lambda-\alpha}\,r^{3(\lambda+1/2)-\alpha}\right]_0^{\eta}$$

$$0\left[n^{1-\alpha}\,r^{\lambda-2\alpha+3/2}\right]_0^{\eta}$$

$$0\left[n^{1-\alpha}\,\eta^{\lambda-2\alpha+3/2}\right]$$

$$0\left[n^{1-\alpha}\,n^{-\lambda+2-3/2}\right]$$

$$0\left[n^{\alpha-\lambda-1/2}\right] \tag{1.3.5}$$

अब हम $I_{3\cdot1\cdot2}$, पर विचार करते हैं जहाँ

$$I_{3\cdot1\cdot2}=\int_{(}^{\eta}\overset{(2)}{S}_{n+1}(r)\Phi_1(r)\,dr$$

$$=\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\eta}\right]\overset{(2)}{S}_{n+1}(r)\Phi_1(r)\,dr$$

$$=I_{3\cdot1\cdot2\cdot1}+I_{3\cdot1\cdot2\cdot2}, \text{ माना} \tag{1.3.6}$$

अब

$$I_{3\cdot1\cdot2\cdot1}=\int_0^{1/n}\overset{(2)}{S}_{n+1}(r)\Phi_1(r)\,dr$$

$$=\int_0^{1/n}0\,(n^{2\lambda+2}\,r^{3(\lambda+1/2)-\alpha})\,dr$$

$$=0\left(n^{2\lambda+2}\,r^{3\lambda-\alpha+5/2}\right)_0^{1/n}$$

$$=0\,[n^{2\lambda+2}\,n^{-3\lambda+\alpha-5/2}]$$

$$=0\,\{n^{\alpha-\lambda-1/2}\} \qquad (1.3.7)$$

अपरंच हमें ज्ञात है

$$I_{3\cdot1\cdot2\cdot2}=\int_{1/n}^{\eta} \overset{(2)}{S}_{n+1}(r)\Phi_1(r)\,dr$$

$$=\int_{1/n}^{\eta} 0\left(\frac{n^{2-\alpha}}{r^{2\lambda+\alpha}}\,r^{3(\lambda+1/2)-\alpha}\right)dr$$

$$=\int_{1/n}^{\eta} 0\,\{n^{2-\alpha}\,r^{-2\lambda-\alpha}\,r^{3(\lambda+1/2)-\alpha}\}\,dr$$

$$=0\left(n^{2-\alpha}\,r^{\lambda-2\alpha+5/t}\right)_{1/n}^{\eta}$$

$$=0\,\{n^{2-\alpha}\,\eta^{\lambda-2\alpha+5/2}-n^{2-\alpha}\,n^{-\lambda+2\alpha-5/2}\}$$

$$=0\,\{n^{\alpha-\lambda-1/2}\} \qquad (1.3.8)$$

अन्त में कोई खण्डशः समाकलन नहीं रहता और प्रमेयिका 2 का प्रयोग करने पर

$$I_{3\cdot2}=\int_{\eta}^{\pi} \overset{(1)}{S}_{n+1}(r)\phi(r)\,dr$$

$$=\left(\phi(r)\overset{\alpha+\lambda}{S}_{n+1}(r)\right)_{\eta}-\int_{\eta}^{\pi} \overset{\alpha+\lambda}{S}_{n+1}(r)\,d\phi(r)$$

$$=0\,[n^{\lambda-\alpha}] \qquad (1.3.9)$$

(1.3.5), (1.3.7), (1.3.8) तथा (1.3.9) को संयुक्त करने पर

$$I_3=0\,[n^{\lambda-\alpha}] \qquad (1.3.10)$$

स्पष्ट है कि I_1, I_2, I_4, I_5 तथा I_6 के कोटि अनुमान I_3 के जैसे हैं और (1.3.10), को दृष्टि में रखते हुए हम देखते हैं कि (1.3.2) सत्य उतरता है।

इस तरह प्रमेय पूरी तरह सिद्ध हो गई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ॰ जी॰ एस॰ पाण्डेय, विभागाध्यक्ष गणित विभाग, विक्रम विश्वविद्यालय के प्रति आभार प्रकट करता है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. भट्ट, एस॰ एन॰, Bull. Calcutta Math. Soc. 1957, **49**, 129-132.
2. गुप्ता, डी॰पी॰, Annali di Matematica pura ed applicatn (IV), LIX, 179-188
3. गुप्ता, डी० पी० तथा पाण्डेय, सी॰ एस॰, Scand, Mathematica. (प्रकाशनाभिमुख)
4. कार्बैतलियांत्ज, ई०, Journ. Math. (9), 3, 107-187.
5. आब्रॅचकाफ, एन॰, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1936, **59**, 266-287.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

कपड़ा उद्योग के रंगीन दूषित पानी को रंगविहीन करने के लिये परिवर्तित मिट्टी का उपयोग

जुग्नु भट्ट तथा बी० जे० भालाला
केन्द्रीय नमक व समुद्री रसायन अनुसंधान संस्थान, भावनगर-364 002

[प्राप्त—जून 5, 1995]

सारांश

विगत 50 वर्षों से कपड़ों का उद्योग अत्यन्त तेजी से विकसित हो रहा है। इसके परिणामस्वरूप साड़ियों की छपाई और रंगाई के कारखानों में से बहते हुए रंगीन दूषित पानी के निकास की व्यवस्था न होने से पर्यावरण के लिए गंभीर समस्या बन गई है। इस विकट प्रश्न के निराकरण के लिये विविध प्रकार के रासायनिक पदार्थ और अन्य तकनीकी उपलब्ध हैं लेकिन प्रत्येक के अपने अपने गुण-दोष हैं। इस समस्या को लक्ष्य में रखकर प्रस्तुत प्रपत्र में बताया गया है कि इसके लिए संयोजित कार्बोदित मिट्टी का उपयोग किया जा सकता है। मिट्टी को क्वाटर्नरी एमोनियम यौगिकों के साथ संयोजित करने से रासायनिक अभिक्रिया से संयोजित कार्बोदित मिट्टी प्राप्त होती है। इस पदार्थ से रंगीन दूषित पानी को उपचारित करने से रंगविहीन पानी मिलता है।

सौराष्ट्र स्थित जेतपुर गाँव में ऐसे बहुत के कारखाने हैं जहाँ साड़ियों की छपाई और रंग चढ़ाने का कार्य होता है। इन कारखानों का गुजरात में प्रथम स्थान है। इन कारखानों से बहते हुए दूषित पानी को रंगविहीन बनाने में हमें प्रयोगिक सफलता मिली है।

संस्थान में किये गये परिष्करण के फलस्वरूप देखा गया कि अन्य परम्परागत अधिशोषियों की तुलना में संयोजित कार्बोदित मिट्टी प्रदूषित पानी को रंगविहीन करने में अधिक सक्षम है।

Abstract

Usc of organo-clay for decolourizing the coloured waste water from textile industry. *By* Jugnu Bhatt and B. T. Bhalala, Central Salt and Ocean Chemistry Institute, Bhavnagar (Gujarat) 364 002.

Textile industry has been immensely developing for about last 50 years. As a result, coloured waste water discharged by Saree Dyeing and Printing units has become a serious problem to the environment because no technological system is available for the treatment of such effluents. There are various types of materials and techniques available to solve this problem, but each has its own merits and demerits. Keeping this in view, the use of organo-clay for such treatment is shown in the present investigation. Organo-clay can be obtained by interaction of clay with quaternary ammonium compound, Colourless waterflow is obtained by treatment of the coloured waste water with this material,

There are number of units of Saree Dyeing and Printing in Jetpur/Navagadh area of Saurashtra. These industrial units are considered to be the foremost in Gujarat. We have been successful on lab-scale in decolourizing the coloured waste water discharged by these units.

Results of the research carried out in the Institute indicate that organo-clays are efficient in decolourizing the coloured effluent as compared to conventional adsorbents.

भारत में शीघ्रता से बढ़ते हुए विकास के परिणामस्वरूप उद्योगों के बहिस्रावों के कारण पानी का प्रदूषण अत्यधिक बढ़ा है। गुजरात राज्य के जेतपुर गाँव में रंगाई और छपाई के कई कारखानें हैं जो रंगाई के अपशिष्ट बहिस्रावों को नदियों में बहाते रहते हैं जिससे पर्यावरण में तल-जल के प्रदूषण की समस्या उत्पन्न हुई है। प्रदूषण नियंत्रण बोर्ड इस जल प्रदूषण को कम करने के प्रति जागरूक हुआ है, फिर भी इस समस्या के निराकरण के लिए संनिष्ठ प्रयत्न नहीं किये गये। रंगीन पानी (बहिस्रावों) को रंगविहीन करने के लिए ऐक्टीवेटेड स्लज प्रोसेस, ट्रिकलिंग फिल्ट्रेशन, सक्रिय कार्बन, ब्लीचिंग पाउडर, क्लोरीन आदि परंपरागत प्रक्रियाएँ अपनाई जाती हैं लेकिन सभी प्रक्रियाओं की अपनी अपनी मर्यादाएँ हैं।

इस प्रपत्र का मुख्य उद्देश्य परिवर्तित मिट्टी का अधिशोषी के रूप में प्रयोग करके बहिस्रावों को रंगविहीन करने के लिए प्रयोगशाला स्तर पर किये गये प्रयोगों के परिणाम को प्रस्तुत करना है। इस कार्य के लिए जिस परिवर्तित मिट्टी का उपयोग किया जाता है वह क्वाटर्नरी एमोनियम यौगिकों के साथ अभिक्रिया कराकर तैयार की गई भारतीय मिट्टी है जो एक अत्यन्त सस्ती (छोटे पैमानों के साथ) उपलब्ध कच्ची सामग्री है।

प्रयोगात्मक

स्थानिक विक्रेता से बेन्टोनाइट मिट्टी के गड्डे प्राप्त करके पीसा गया तथा निर्धारित कण प्राप्त करने के लिए छाना गया और इसकी अशुद्धियों को दूर करने के लिए तलछटन (सेडीमेन्टेशन) तकनीक अपनाई गई। अधिप्लवी (सुपरनेटेन्ट) मिट्टी के मिश्रण को हाइड्रोजन धनायन विनिमय रेजिन

से भरे हुए स्तंभ में से पूर्वनिर्धारित दर से पारित किया गया। स्तंभ में से प्राप्त बहिस्राव हाइड्रोजन धनायन के रूप में पाया गया जो तुरन्त उपयोग में लाये जाने योग्य था।

क्वाटर्नेरी एमोनियम यौगिक हेक्साडेकाइल ट्राइमेथिल एमोनियम क्लोराइड (एचडीटीएमएसी) तथा नार्मल सीटाइल पिरीडीनियम क्लोराइड (एनसीपीसी) वैश्लेषिक अभिकर्मक स्तर का था। हेक्सा-डेकाइल ट्राइमेथिल एमोनियम तथा नार्मल सीटाइल पिरीडीनियम क्लोराइड निर्धारित मात्रा में लेकर पूर्वनिर्धारित निस्यंदित पानी की मात्रा में कमरे के तापमान पर दोनों का अलग अलग द्रावण तैयार किया गया।

इस मिट्टी के हाइड्रोजन धनायन रूप के मिश्रण में एचडीटीएमएसी तथा एनसीपीसी द्रावणों के साथ क्रमशः उपचारित करके धनायन विनिमय क्षमता वाले बेन्टोनाइट के मिश्रण को एक घण्टे के लिए कमरे के तापमान पर रखा गया और अभिक्रिया किये गये मिश्रण का विनिमय संतुलित करने के लिए एक घण्टा के लिए रखा गया। उसके बाद उत्पाद को छाना गया तथा धोकर सुखाया गया। निर्धारित तापमान पर सुखाने के बाद इस कर्बोदित मिट्टी को पीसकर छाना गया। इस कार्बोदित मिट्टी के नमूने को अधिशोषक सामग्री के रूप में प्रयुक्त किया गया।

इन कार्बोदित मिट्टी से जेतपुर (गुजरात) के औद्योगिक क्षेत्र से एकत्रित किये गये बहिस्रावों को उपचारित किया गया। अधिशोषित तथा अधिशोष्य में साम्य स्थापित करने के लिए उसके सम्पर्क समय निकालने के लिए सतत अपशिष्ट पानी में अधिशोष्य सामग्री उचित मात्रा में मिलाई गई। निर्धारित अंतरालों के बाद संतुलित मिश्रण को छाना गया और छाने गये मिश्रण का युवी-वी-आइएस स्पेक्ट्रो-फोटोमीटर द्वारा रंग-सांद्रता निश्चित करने के लिए उपयोग किया गया। अधिशोष्य की मात्रा निर्धारित करने के लिए अपशिष्ट जल के साथ विविध अधिशोषकों को निर्धारित समय के लिए मिलाया गया। साम्य स्थापित करने के बाद नमूने को छाना गया और रंग सांद्रता के लिए इसका विश्लेषण किया गया। पोटैशियम फेरोसाइनाइड द्वारा उपचारित रंगीन बहिस्रावों में क्वाटर्नेरी एमोनियम यौगिकों की उपस्थिति जानने के लिए परीक्षण किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

चार अधिशोषकों के सम्पर्क समय जानने के लिए किये गये परीक्षणों के परिणाम सारणी-1 में वर्णित हैं। यह बताता है कि रंगीन अपशिष्ट जल के लिए सक्रिय किये गये कार्बन, एनसीपी कार्बोदित मिट्टी, एचडीटीएमए कार्बोदित मिट्टी में संतुलन प्राप्त करने के लिए उनका सम्पर्क समय लगभग 90 मिनट का है जबकि बेराजेल, जो आयात की गई कार्बोदित मिट्टी है, उसका संतुलन प्राप्त करने के लिए सम्पर्क समय 19 घण्टे का है जहाँ अधिशोषण 85 प्रतिशत होता है। बेराजेल की तुलना में एचडीटीएमए तथा एनसीपी कार्बोदित मिट्टी 90 मिनट जैसे कम सम्पर्क समय में अपशिष्ट जल को रंगविहीन करने में कार्यक्षम है। सक्रिय किये गये कार्बन का सम्पर्क समय 90 मिनट का है पर उसकी

अधिशोषण क्षमता एचडीटीएमए तथा एनसीपी कार्बोदित मिट्टी की तुलना में लगभग 1/5 है। सारणी 1 में वर्णित परीक्षणों के परिणाम बताते हैं कि अधिशोषण प्रक्रिया समय पर आधारित है।

सारणी-1

अधिशोषी सामग्रियों का सम्पर्क समय

(रंग अधिशोषण का प्रतिशत दर)

सम्पर्क समय मिनट में	एचडीटीएमए कार्बोदित मिट्टी	एनसीपी कार्बोदित मिट्टी	बेराजेल	सक्रिय किया हुआ कार्बन
2	76.30	68.82	37.40	10.30
4	78.45	71.36	43.00	11.60
7	81.00	76.80	48.40	13.10
10	83.10	76.10	52.20	14.70
15	84.10	80.90	55.20	16.15
30	86.00	81.50	60.30	17.00
60	90.00	83.00	67.70	17.80
90	90.60	83.25	73.60	18.05
120	90.30	82.30	76.40	18.05
150	88.90	82.60	79.70	17.95
170	88.00	82.30	81.10	17.60
19 घण्टा	87.10	79.60	85.60	17.80

अधिशोषण क्रिया के प्रत्यांगिक पेरामीटर का अनुमान करने के लिए सम्पर्क समय की जानकारी आवश्यक है। अधिशोषण की दर अधिशोषकों के लक्षणों से प्रभावित होती है। कार्बोदित मिट्टी के साथ 6 विविध अधिशोषकों की विभिन्न मात्रा में अधिशोषण-क्षमता के लिए प्रयोगशाला स्तर पर किये गये परीक्षणों के परिणाम सारणी-2 में वर्णित हैं। एचडीटीएमए तथा एनसीपी कार्बोदित मिट्टी की सक्रिय किये गये कार्बन तथा दूसरे अधिशोषकों की मात्रा की तुलना करके देखा गया कि दूसरे अधिशोषकों की अपेक्षा ये दो अधिशोषक रंग दूर करने में ज्यादा कार्यक्षम है। सारणी-1 में वर्णित तथ्य

भी इसी की पुष्टि करते हैं कि एचडीटीएमए और एनसीपी कार्बोदित मिट्टी दूसरे अधिशोषकों की तुलना में विशेष रूप से कार्यक्षम हैं।

सारणी-2

अधिशोषण में मात्रा का प्रभाव

(रंग अधिशोषण का प्रतिशत दर)

अधिशोषी की मात्रा ग्राम/100 मिली०	सक्रिय कार्बन	एचडीटीएमए कार्बोदित मिट्टी	एनसीपी कार्बोदित मिट्टी	हाइड्रोजन रूप में कार्बोदित मिट्टी	मुलतानी मिट्टी	बेराजेल
0.2	53.9	80.9	77.4	20.0	30.7	36.9
0.3	86.5	96.0	97.5	18.8	24.4	48.5
0.5	97.8	95.7	98.6	19.6	20.4	64.6
0.7	97.8	96.0	98.9	31.2	26.9	81.2
0.9	98.0	98.4	98.3	23.4	21.9	90.8
1.1	97.8	99.8	98.4	19.0	14.6	94.9

सभी उपचारित रंगीन बहिस्रावों के परीक्षण से देखा गया कि इनमें क्वाटर्नरी एमोनियम की तनिक की मात्रा विद्यमान नहीं थी।

इस संशोधन कार्य में साड़ी की रंगाई और छपाई उद्योग के बहिस्रावों पर रंगविहीनता के लिए किये गये तुलनात्मक अभ्यास से देखा गया कि दूसरे अधिशोषकों की तुलना में प्रयोगशाला के स्तर पर तैयार की गई एचडीटीएमए तथा एनसीपी कार्बोदित मिट्टी पानी का रंग दूर करने में ज्यादा कार्यक्षम है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

अपशिष्ट जल के नमूने उपलब्ध कराने के लिए हम विकास टेक्सटाइल्स प्रिन्टर्स, जेतपुर के आभारी हैं। हम इस शोध कार्यकाल में मार्गदर्शन प्रदान करने के लिए डॉ० वी० पी पंड्या के भी आभारी हैं।

निर्देश

1. इन्डीयन न्युज एण्ड व्युज, तंत्री लेख, इन्डी० ज० ऑफ एनव्हो० प्रोटे०, 1987, 7, 250.

2 जुडकिन्स, जे० एच० तथा होर्नसंबे, जे० एस०, ज० वॉटर० पोल्यु० कान्ट्रो० फेड० 1978, **50**, 2446.

3 भट्ट, एस०आर०, सुब्रामनियम, के०तथा स्वामी, के० आर०, सरक्युलर रिपोर्ट नं० एन्जी/116 1981, **21**, अटीरा, अहमदाबाद

4. फ्रेन्क, एलेक्झांडर, विक्टर, जे०पी० तथा गोर्डन, मेके, इन्डी० एन्जी० केम०, प्रोसी० डेस० देव०, 1978, **17**, 406.

5. सुखोरूच्कीना ए० एस० बोरादावको, एन० डी०, तथा वज्न्युक, ई० पी०, वेपर खीम खीम जरनाल, 1986, 8०, 28-32.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

आर्थोनार्मल श्रेणी की मैट्रिक्स संकलनीयता

एस० के० वर्मा तथा यू० के० श्रीवास्तव
गणित विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 2, 1995]

सारांश

इस प्रपत्र में आर्थोनार्मल श्रेणी में मैट्रिक्स माध्य का प्रयोग करते हुए काँटावाला, अग्रवाल तथा पटेल के प्रमेय [3] का सार्वीकरण किया गया है।

Abstract

On matrix summability of orthonormal series, *By* S. K. Verma and U. K. Shrivastava, Department of Mathematics, Government Science College, Bilaspur (M. P.)

In this paper we have generalized a theorem of Kantawala, Agrawal and Patel [3] by using matrix means to orthonormal series.

1. परिभाषा तथा संकेतन

माना कि $[\phi_n(x)]$ $(n=0,1,2\ldots)$ एक आर्थोनार्मल प्रणाली (ONS) है L^2-समाकलनीय फलनों की जिन्हें परिबद्ध अन्तराल (a, b) में परिभाषित किया जाता है। हम आर्थोनार्मल श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\phi_n(x) \qquad (1.1)$$

को लेते हैं जहाँ सारे C_n असली गुणांक हैं।

माना कि श्रेणी (1.1) के nवें आंशिक योग तथा nवें मैट्रिक्स (T) माध्य को $S_n(x)$ तथा $t_n(x)$ द्वारा अंकित किया जाता है —

अर्थात्

$$S_n(x)= \sum_{r=0}^{n} C_r\phi_r(x) \tag{1.2}$$

$$t_n(x)= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, s_k(x)$$

जहाँ $T=(a_{n,k})$ से सिल्वरमैन टॉपलिट्ज के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|<c$ समस्त n के लिए जहाँ c अचर है

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k}=0$ समस्त k के लिए

तथा

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}=1$

श्रेणी (1.1) को मैट्रिक्स (T) माध्य द्वारा $S(x)$ तक संकलनीय कहा जाता है यदि

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x)=s(x)$$

जब

$$a_{n,k}=\frac{p_{n-k}}{P_n},\ P_n=p_0+p_1+\dots+p_n$$

$$p_r=P_r=0,\ r<0$$

मैट्रिक्स माध्य सुविख्यात नार्लुण्ड माध्य में[2] समानीत हो जाता है ।

2. मुख्य परिणाम

हाल ही में काँटावाला इत्यादि[3] ने श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x)-N_n(x)|^q}{n},\ q\geqslant 2$$

के अभिसरण की व्याख्या निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करके फलनों $\phi_n(x)$ की एकरूप परिबद्धता की संकल्पना के अन्तर्गत की है ।

प्रमेय A : यदि

$$p_0>0,\ p_n\geqslant 0,\ np_n=0(p_n)$$

तथा

$$|\phi_n(x)|\leqslant k(n=0,\ 1,\ 2\ldots) \tag{2.1}$$

तो

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x)-N_n(x)|^q}{n}\ dx \tag{2.2}$$

$$=0(1) \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q.n^{q-2}$$

जहाँ $q\geqslant 2$ तथा $N_n(x)$ nवाँ नार्लुण्ड माध्य है श्रेणी

$$N_n(x)= \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}s_k(x)$$

का इस प्रपत्र में हमने मैट्रिक्स संकलनीयता का उपयोग करते हुए उपर्युक्त प्रमेय का सार्वीकरण किया है।

प्रमेय

यदि प्रतिबन्ध (2.1) तथा

$$1-A_{n,k}=0\left(\frac{1}{n} \right), \quad \text{जहाँ } A_{n,k}= \sum_{\nu=k}^{n} a_{n,\nu} \tag{2.4}$$

तुष्ट होते हैं तो

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x)-t_n(x)|^q}{n}\ dx$$

$$=0(1) \sum_{n=1}^{\infty} \text{ जहाँ } q\geqslant 2$$

अपने प्रमेय की उपपत्ति के लिए हम निम्नलिखित प्रमेयिका का प्रयोग करेंगे।

प्रमेयिका

(पाले का प्रमेय) [बैरी[1] पृ० 224, जिगमुण्ड[5] पृ० 121]

माना कि $[\phi_n(x)]$ अन्तराल (a, b) में एक ONS है तथा $|\phi_n(x)|\leqslant M$ क्योंकि $a<x<b$ यदि $q\geqslant 2$ तथा $c_1c_2\ldots c_n\ldots$ संख्याओं का अनुक्रम हो जिसके लिए

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q . n^{q-2} < +\infty$$

तब फलन $f(x) \in L^q(a, b)$ का अस्तित्व रहता है जिसके लिए संख्याएँ c_n प्रणाली $(\phi(x))$ के प्रति फूरियर गुणांक हैं तथा

$$\left\{\int_a^b |f|^q \, dx\right\}^{1/q} \leqslant B_q \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q n^{q-2} \right\}^{1/q}$$

जहाँ B^q केवल q तथा M पर निर्भर करता है।

प्रमेय की उपपत्ति

$$s_n(x) - t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) - \sum_{r=0}^{n} a_{n,r} \, sr(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) - \sum_{r=0}^{n} a_{n,r} \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \sum_{r=k}^{n} a_{n,r}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \left(1 - \sum_{r=k}^{n} a_{n,r} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \, (1 - A_{n,k})$$

जहाँ

$$A_{n,k} = \sum_{j=k}^{n} a_{n,v}$$

प्रमेयिका का उपयोग करने पर

$$\int_a^b |s_n(x) - t_n(x)|^q dx = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \, (1 - A_{n,k}) \right|^q dx$$

$$\leqslant A_1 \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q |(1 - A_{n,k})|^q k^{q-2}$$

अतः

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x)-t_n(x)|^q}{n}\, dx$$

$$\leqslant A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q |(1-A_{n,k})|^q . k^{q-2}$$

$$= A_1 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q k^{q-2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-A_{n,k})^q}{n}$$

इसलिए

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x)-t_n(x)|^q}{n}\, dx$$

$$= 0(1) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q k^{q-2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{q+1}}$$

क्योंकि $q \geqslant 2$

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x)-t_n(x)|^q}{n}$$

$$= 0(1) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q k^{q-2}$$

इससे हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में शासकीय विज्ञान महाविद्यालय के गणित विभाग के अध्यक्ष डॉ० आर० एस० यादव ने जो मार्गदर्शन किया उसके लिए लेखकद्वय आभारी हैं।

निर्देश

1. बैरी, एन० के० A Treatise on Trigonometric Series Vol. I, Pergamon Press, Oxford. 1964.
2. नार्लुण्ड, एन० ई०, Arskrift 1919, 16 (2), 1-10.
3. काँटावाला, अग्रवाल तथा पटेल, I. J. M., 1989, **31** (2), 155-153.
4. टोप्लिट्ज, ओ०, P. M. P. 1913, **22**, 113-19.
5. जिगमुण्ड, ए० Trigonometric Series, Vol. II, Cambridge University Press. 1979.

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

सिस्टर सेलीन बहुपदों के रूप में बहुपद सेट $\left\{\phi_n^* (x, y, z)\right\}$ का प्रसार

रामजी सिंह तथा राजेश कुमार तिवारी

गणित विभाग, डी॰ एन॰ कालेज मशौढी (पटना), बिहार

[प्राप्त—मई 5, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का मुख्य उद्देश्य बहुपद सेट $\left\{\phi_n^* (x, y, z)\right\}$ को सिस्टर सेलीन के रूप में प्रदर्शित करना है।

Abstract

Expansion of the polynomial set $\left\{\phi_n^* (x, y, z)\right\}$ in terms of the Sister-Celine polynomials. *By* Ramji Singh P. G. Centre, Maharaja College, Arrah, and Rajesh Kumar Tiwary, D. N. College Mashaurhi (Patna), Bihar.

The main aim of this paper is to represent the polynomial set $\left\{\phi_n^* (x, y, z)\right\}$ in terms of well known Sister-Celine Polynomials. Some interesting useful results have been obtained.

1. मुख्य परिणाम

प्रमेय : हमें ज्ञात है कि

$$\phi_n^* (x, y, z) = \sum_{u=0}^{[n/e_1]} \sum_{v=0}^{[n/e_2]} \sum_{h=0}^{[n]} \frac{[(f_e)]_{n-e_1 u-e_2 v}}{[(Q_{12}(i, \ ))]_{n-(e_1+e_6)u-(e_2+e_5)v}}$$

$$\times \frac{[(Q_1(i,j))]_{n-e_1u-e_2v}[(Q_2(i,j))]_u\,[(Q_3(i,j))]_v}{[(Q_7(i,j))]_{n-e_1u-e_2v}[(Q_8(i,j))]_u}$$

$$\times \frac{[(Q_{10}(i,j))]_{n-(e_1+e_4)u-(e_2+e_3)v}[1-(Q_{11}(i,j))]_{n-(e_1+e_4)u-(e_1+e_3)v}}{[(Q_9(i,j))]_v}$$

$$\times \frac{[1-(Q_4(i,j))]_{(n-e_1u-c_2v)}\,[1-(Q_5(i,j))]_u\,[1-(Q_6(i,j))]_v}{[(d_g)_{n-e_1u-e_2v]}\,u!v!}$$

$$\times \frac{Y^{b_2u/E_0''}\quad Z^{b_3v/E_0'''}\;(\tfrac{1}{2})_{n-e_1u-e_2v}\,(n-e_1u-e_2v)!(-1)^h}{(n-h-e_1u-e_2v)!}$$

$$\times \frac{[illegible]\,x^{b_1/e'_0)}\,(E_1)^{n-e_1u-e_2v}\,(E_2)^u\,(E_3)^v}{(n-e_1u-e_2v+h+1)!}$$

$$\times F\left[\begin{array}{l}\Delta(c_4;-n+h+e_1u+e_2v),\ \Delta(c_4;-n-h+e_1u+e_2v-1)\\ \Delta^3(c_4;1-(Q_7(i,j))-n+e_1u+e_2v),\\ \Delta^4(C_4;1-(Q_{12}(i,j))-n+(e_1+e_6)u+(e_2+e_5)v);\\ \Delta^1(C_4;1-(Q_1(i,j))-n+e_1u+e_2v),\\ \Delta^2(C_4;1-(Q_{10}(i,j))-n+(e_1+e_4)u+(e_2+e_3)v),\\ \Delta^5(C_4;(Q_{11}(i,j))-n+(e_1+e_4)u+(e_2+e_3v),\\ \Delta^6(C_4;(Q_4(i,j))-n+e_1u+e_2v),\\ \Delta(C_4;(\tfrac{1}{2})-n+e_1u+e_2v),\ \Delta(C_4;-n+e_1u+e_2v),\\ \Delta(C_4;1-(f_e)-n+e_1u+e_2v);\\ \dfrac{(-C_4)^{C_4(P'-Q'-1+g-e)}(C_1Z)}{(E_1)^{C_4}}\end{array}\right] \tag{1.1}$$

उपपत्ति [3, (1.2)] को उपयोग में लाने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* (x, y, z) t^n \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{n} \frac{(E_1)^r (E_2)^u}{u! v! w!}$$

$$\times \frac{(E_3)^v (C_1)^w [(Q_1(i, j))]_n [(Q_2(i, j))]_u [(Q_3(i, j))]_v}{[(Q_{12}(i, j))]_{n-e_3 v-e_4 u}}$$

$$\times \frac{[(Q_{10}(i, j))]_{n-e_3 v \quad e_4 u} [1-(Q_{11}(i, j))]_{(n-e_3 v-e_4 u)}}{[(Q_7(i, j))]_n [(Q_8(i, j))]_u}$$

$$\times \frac{[1-(Q_4(i, j))]_n [1-(Q_5(i, j))_u [1-(Q_6(i, j))]_v}{[Q^9(i, j))]_v [(d_g)_n}$$

$$\times \frac{(\tfrac{1}{2})_n n! (-1)^h (2h+1) [(f_e)]_n C_h (x^{b_1/E'_0})}{(n-h)!}$$

$$\times \frac{Y^{b_2 u/E''_0} Z^{b_3 v/E_0'''} + w_t n + e_1 u + e_2 v + Cw}{(n+h+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(E_1)^{n+h} (E_2)^u (E_3)^v [(Q_1(i, j))]_{n+h}}{[(Q_{12}(i, j))]_{n+h-e_5 v-e_6 u}}$$

$$\times \frac{[(Q_2(i, j))]_u [(Q_3(i, j))]_v [(Q_{10}(i, j))]_{n+h-e_3 v-e_4 u}}{[(Q_7(i, j))]_{n+h} [(Q_8(i, j))]_u [(Q_9(i, j))]_v}$$

$$\times \frac{[1-(Q_{11}(i, j))]_{n+h-e_3 v-e_4 u} [1-(Q_4(i, j))]_{n+h} [1-(Q_5(i, j))]_u}{[(d_g)]_{n+h} u!}$$

$$\times \frac{[1-(Q_6(i, j))]_v Y^{b_2 u/E_0''} \quad Z^{b_3 v/E_0'''} \quad (\tfrac{1}{2})_{n+h} (n+1)!}{v! n!}$$

$$\times \frac{(-1)^h (2h+1) (f_e)_{n+h} C_h (x^{b_1/E'_0}) t^{n+h+e_1 u+e_2 v}}{(n+2h+1)!}$$

$$\times F\left[\begin{array}{l}\Delta(C_4;-n),\ \Delta(C_4;-n+2h-1),\ \Delta(C_4;1-(d_g)-n-h),\\ \Delta^3(C_4;1-(Q_7(i,j))-n-h),\ \Delta^4(C_4;1-(Q_{12}(i,j))-n-h+e_5v+e_6u);\\ \Delta^1(C_4;1-(Q_1(i,j))-n-h),\\ \Delta^2(C_4;1-(Q_{10}(i,j))-n-h+e_3v+e_4u),\\ \Delta^6(C_4;(Q_4(i,j))-n-h),\\ (C_4;\tfrac{1}{2}-n-h),\ \Delta(C_4;-n-h),\\ \Delta(C_4;1-(f_e)-n-h);\\ \dfrac{(-C_4)^{C_4(p'-Q'-1+g-c)}(C_1Z)}{(E_1)^{C_4}}\end{array}\right]$$

अब प्रमेयिका ($n-h-e_1u-e_2v$ रूप लिखते हुए) का प्रयोग करने तथा दोनों पक्षों से t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हम (1.1) की प्राप्ति होती है ।

(1.1) की विशिष्ट दशाएँ

(i)
$$C_n^s(y)=\sum_{h=0}^{n}\frac{(S)_n(\frac{1}{2})_n(-1)^h(2h+1)2^n n![(f_e)]_n}{(n-h)!(n+h+1)!(d_g)_n}$$

$$\times F\left[\begin{array}{r}-n+h,\ -n-h-1,\ \tfrac{1}{2}-S-n,\ 1-(d_g)-n;\\ 2(-1)^{g-e}\\ 1-2S-2n,\ \tfrac{1}{2}-n,\ -n,\ 1-(f_e)-n\end{array}\right]C_h(y-1)$$

(ii)
$$U_n(y)=\sum_{h=0}^{n}\frac{[(f_e)]_n n!n!(\frac{1}{2})_n(-1)^n(2h+1)2^n}{(n-h)!(n+h+1)![(d_g)]_n}$$

$$\times F\left[\begin{array}{l}\frac{-2n-1}{2},\ 1-(d_g)-n,\ -n+h,\ -n-h-1;\\ -2n-1,\ \tfrac{1}{2}-n,\ -n,\ 1-(f_e)-n;\\ \qquad 2(-1)^{g-e}\end{array}\right]C_h(y-1)$$

(iii) $$Z_n(y) = \sum_{h=0}^{n} \frac{(1)_n(\frac{1}{2})_n(-1)^h(2h+1)[(f_e)]_n(-g)^n}{(n-h)!(n+h+1)![(d_g)]_n}$$

$$\times F\left[\begin{matrix} -n, \ -n+h, \ -n-h-1, \ 1-(d_g)-n; \\ -2n, \ \frac{1}{2}-n, \ 1-(f_e)-n; \\ (-1)^{g-e} \end{matrix}\right] C_h(y)$$

(iv) $$P_n(y) = \sum_{h=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2})_n[(f_e)]_n(-1)^h(2h-1)n!2^n}{(n-h)!(n+h+1)![(d_g)]_n}$$

$$\times F\left[\begin{matrix} -n+h, \ -n-h-1, \ 1-(d_g)-n; \\ -2n, \ \frac{1}{2}-n, \ 1-(f_e)-n; \\ 2(-1)^{g-e} \end{matrix}\right] C_h(y-1)$$

(v) $$P_n^{(c_1, d_1)}(y) = \sum_{h=0}^{n} \frac{(1+c_1+d_1)_{2n}(\frac{1}{2})_n n![(f_e)]_n(-1)^h(2h+1)}{(1+c_1+d_1)_n 2^n(n-h)!(n+h+1)![(d_g)]_n}$$

$$\times F\left[\begin{matrix} -n+h, \ -n-h-1, \ -c_1-n, \ 1-(d_g)-n; \\ -c_1-d_1-2n, \ \frac{1}{2}-n, \ -n, \ 1-(f_e)-n! \\ 2(-1)^{g-e} \end{matrix}\right] C_h(y-1)$$

संकेतन

$$[(Q_1(i, j))] = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{b'j/E'_0} \left(\frac{i-dj}{D'j/E'_0} + e'_0\right)$$

$$[(Q_2(i, j))] = \prod_{j=1}^{n''} \prod_{i=1}^{Dj''/E_0''} \left(\frac{i-dj''}{Dj''/E_0''} + e'_0\right)$$

$$[1-(Q_4(i, j))] = \prod_{j=n'+1}^{P'} \prod_{i=1}^{D'j/E'_0} \left(1 - \left(\frac{i-1+d'j}{D'j/E'_0}\right)\right)$$

$$[(Q_3(i, j))] = \prod_{j=1}^{n'''} \prod_{i=1}^{Dj'''/E_0'''} \left(\frac{i-dj''}{Dj'''/E_0'''} + e_0'''\right)$$

$$[1-(Q_5(i,j))]=\prod_{j=n''+1}^{P''}\prod_{i=1}^{D_j''/E_0''}\left(1-\left(\frac{i-1+d_j''}{D_j''/E_0''}-e_0''\right)\right)$$

$$[(Q_6(i,j))]=\prod_{j=n'''+1}^{P'''}\prod_{i=1}^{D_j'''/E_0'''}\left(1-\left(\frac{i-1+d_j'''}{D_j'''/E_0'''}-e_0'''\right)\right)$$

$$[(Q_7(i,j))]=\prod_{j=1}^{q'}\prod_{i=1}^{E'j/E'_0}\left(\frac{i-e'j}{E'j/E'_0}+e'_0\right)$$

$$[(Q_{10}(i,j))]=\prod_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{A'j/E'_0}\left(\frac{i-a_j+A'_1/E'_0e'_0+A_j''/E_0''e_0''+A_j'''/E_0'''e_0'''}{A'j/E'_0}\right)$$

$$[1-(Q_{11}(i,j))]=\prod_{j=N+1}^{P}\prod_{i=1}^{A'j/E'_0}\left(1-\frac{i+a_j-1A'j/E'_0e'_0-A_j''/E_0''e_0''-A_j'''/E_0'''e_0'''}{A_j'/E'_0}\right)$$

निर्देश

1. सिंह, आर० तथा तिवारी, आर० के०, Mendal, 1990, 7(3-4), 431-433.
2. तिवारी, आर० के० तथा सिंह, आर०, The Mathematics Education, 1994, XXVIII, (3), 130-134.
3. सिंह, आर०तथा तिवारी, आर०के०,**विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1994, **37** (4), 135-146.
4. रेनविले. ई० डी०, Speclal function, 1960.
5. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1985, **28** (4), 361-77.
6. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc, 1961, **98**, 395-429.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

राजस्थान के स्तनधारी

सतीश कुमार शर्मा

क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना, झाडोल (फ०)
उदयपुर (राजस्थान), 313702

[प्राप्त—मई 22, 1995]

सारांश

राजस्थान तथा उसके पड़ोसी राज्य एवं पाकिस्तान के रेगिस्तानी क्षेत्र एक विशिष्ट प्रकार का आवास क्षेत्र निर्मित करते हैं जिसका प्राणीसमूह अपने में विशिष्ट है। इस क्षेत्र में कुन्तकों का बाहुल्य है जो शुष्क भोजन पर बिना पानी भी जीवित बने रहते हैं। वस्तुत: वे उपापचय के दौरान उत्पन्न पानी से ही अपनी जरूरतें पूरी कर लेते हैं। राजस्थान के अरावली क्षेत्र एवं इसके पूर्व में स्थित क्षेत्र में प्राणि-विविधता कुछ भिन्न है। बड़ी बिल्लियाँ या हिरण इस क्षेत्र की विशेषताएँ हैं। राजस्थान के भौगोलिक क्षेत्र में सम्प्रति कुल 97 स्तनधारियों की उपस्थिति ज्ञात हुई है।

Abstract

Mammals of Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.) Dist. Udapur (Raj.) Pin 313 702.

The area of Rajasthan, its surrounding states and desert portion of Pakistan make a special type of habitat which has characteristic faunal diversity of its own kind. Rodents are the largest group in mammal fauna of this zone. Rodents of this zone can live on perfectly dry food with no water at all. All their body fluid is derived from metabolic water. The area of Aravallis and eastward to it has different types of faunal diversity. Large cats and deer are characteristic animals of this part. At present, as many as 97 mammalian species are known from the geographical area of Rajasthan.

भारत में वन्य प्राणी विविधता की दृष्टि से 6 प्रमुख क्षेत्र हैं—हिमालय या तलहटी क्षेत्र

पश्चिमी हिमालय का अधिक ऊँचाई वाला क्षेत्र, पूर्वी हिमालय क्षेत्र, प्रायद्विपीय भारत, भारतीय रेगिस्तान एवं वर्षा वन क्षेत्र। भारतीय रेगिस्तान क्षेत्र का अपना विशिष्ट प्राणि-समूह है। इस क्षेत्र में राजस्थान के शुष्क एवं अर्द्ध शुष्क क्षेत्र, पंजाब के शुष्क क्षेत्र एवं गुजरात के शुष्क क्षेत्र सम्मिलित हैं। अरावली पर्वतमाला के पूर्व की ओर स्थित राजस्थान का भू-भाग अर्द्ध-शुष्क प्रकार का है तथा मरुक्षेत्र से कुछ भिन्न प्रकृति का है।

भारतीय रेगिस्तान में एशियाई जंगली गधा तथा काला हिरण, रेगिस्तानी बिल्ली, स्याहगोश, गोडावण, अनेक तरह के सरीसृप आदि विशिष्ट प्राणी पाये जाते हैं। शुष्क परिस्थितियों में पानी की कमी में रहने के अनेक अनुकूलन इन प्राणियों में पाये जाते हैं।

प्रस्तुत पत्र में राजस्थान के रेगिस्तानी क्षेत्र के प्राणियों का ही नहीं बल्कि इस प्रान्त के दक्षिणी एवं पूर्वी भौगोलिक क्षेत्र के प्राणियों का लेखा-जोखा भी दिया गया है। राजस्थान में वन एवं वन्य जीव संरक्षण की अपनी विशिष्ट परम्परा है। खेजडी के वृक्षों को बचाने के लिये खेजडली गाँव का बलिदान अमर है। यह गाँव पश्चिमी राजस्थान में स्थित है तथा इसके गौरव इतिहास से जुडे हैं विश्नोई। बिश्नोई समाज आज भी वन्य प्राणियों को बचाने में जी-जान से जुटा है। इस समाज के 29 नियम हैं जिनमें नियम 14,15,16 एवं 17 विशेष तौर से वन्य प्राणियों एवं प्राकृतिक सम्पदा की रक्षा के लिये बने हुए हैं। बीकानेर के पास करणीमाता के मन्दिर में चूहों तक की सुरक्षा एवं भोजन का इंतजाम है। उदयपुर जिले के बांसी गाँव में पुराने समय का शिलालेख गांव के तालाब के किनारे पर लगा हुआ है जिसमें हिन्दू एवं मुसलमानों को अपने इष्टों की सौगंध दे कर तालाब के पक्षियों की सुरक्षा करने को कहा गया है। नीलगाय लोगों की धार्मिक आस्था के कारण संरक्षण पाये हुए है। ऐसे अनेकानेक उदाहरण देखे जा सकते हैं। इन्हीं सुरक्षा उपायों का परिणाम है कि प्राणि-विविधता में राजस्थान जैसा शुष्क प्रदेश सदाबहार है।

प्रस्तुत पत्र में स्तनधारी विविधता का उल्लेख किया गया है। राजस्थान के स्तनधारियों सम्बन्धी ज्ञान आडवानी तथा जैन[1], आडवानी तथा माथुर[2], बलसार[3], बेटीज तथा साथी[4], लिवेशी[5], प्रकाश[6–7], प्रेटर[8], रहमानी[9], राणा तथा सोनी[10], राईस[11], रुकमाकर[12], सक्सेना[13], साही[14], सिंह तथा शर्मा[15], सिन्हा[16], तहसीन[17, 18], तिवारी[19], त्रिपाठी[20] आदि के कार्यों से मिलता है। राजस्थान, विशेषकर पश्चिमी क्षेत्र में स्थित थार के रेगिस्तान के जीवों पर श्री प्रकाश[6–7] का कार्य अत्यन्त महत्पूर्ण है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन क्षेत्र एवं उसकी पारिस्थितिकी :

अरावली पर्वतमाला राजस्थान को दो असमान भागों में बाँटती है। अरावली पर्वतमाला के पश्चिम में शुष्क थार रेगिस्तान फैला है तथा पूर्व में अर्द्ध-शुष्क मैदान हैं। अरावली पर्वतमाला एवं पूर्वी भू-भाग में अच्छे वन हैं। पश्चिमी भू-भाग के शुष्क क्षेत्र में गर्मी एवं सर्दी में रेत के टीले वनस्पति-

सारणी 1

राजस्थान के स्तनधारी

कुल	वैज्ञानिक नाम	अंग्रेजी नाम	राजस्थान में स्थानीय नाम	वर्तमान में ज्ञात वितरण
1. कुल केलिथ्रीसीडी (Callithricidae)				
1.1.1	Macaca Mulatta	Rhesus Macnque	बांदर, बांदरा, लकुबांदरा	पूर्वी, दक्षिण पूर्वी, दक्षिण राजस्थान
2. कुल सरकोपिथेसिडी (Cercopithecidae)				
2.1.2	Preshytic entellus	Common Langur or Hanuman Monkey	लंगूर, माकड, वानर, वानर, डालीबोकड, नर वानर	सम्पूर्ण राजस्थान (पश्चिम में जोधपुर तक)
3. कुल फैलिडी (बिल्ली वर्ग) (Felidae)				
3.1.3	Penthera tigris tigris	Tiger	नाहरा, नार, शेर, बाघ	चित्तोडगढ, कोटा बूंदी, रणथम्भोर, सरिस्का, करौली धौलपुर, माउण्ट अम्ल,
3.2.4	P. Pardus sindicn	Leopard or Panther	भगेरो, दोगला, अधवेसरा चीतरा	रेगिस्तानी क्षेत्र को छोडकर सम्पूर्ण राजस्थान

3.2.5	Fellis domestica	House Cat	बिल्ली, मिन्नी	सम्पूर्ण राजस्थान
3.3.6	F. viverrina	FishingCat		भरतपुर, पाली, अलवर, उदयपुर
3.4.7	F. chaus kutas	Jungle Cat	जंगली बिल्ली	सम्पूर्ण राजस्थान
3.5.8	F. coaus prnteri	Jungle Cat	मिनकी, बिलाव, बिलाडा	प० राजस्थान
3.6.9	P. libyca ornata	Descrt Cat	मिनकी, बिल्ली	शुष्क एवं अर्द्धशुष्क क्षेत्र
3.7.10	F. caracal rchmitzi	Caracal	स्याहगोश	रणथम्भौर, सरिस्का, पाली
3.8 11	F. rubiginosa	Rusty Spotted Cat		उदयपुर
4. कुल विनेरिठी (Viverridac)				
4.1.12	Viverricula indica deserti	Small Indian Civel	बिज्जु	पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान
4.2.13	Paradoxurus hermaphroditur	Common Palm Oivet or Toddy Cat		पूर्वी एवं दक्षिणी राजस्थान
5. कुल हरपेस्टिडी (नेक्ला वर्ग) (Herpestidae)				
5.1.14	Herpestes edwardsi ferrugineus	Common Mangoose	नेक्ला, नौलाई	लगभग सम्पूर्ण राजस्थान

	5.2.15	H. C. nyuia		नौल्या	प० राजस्थान
	5.3.16	auropunctatus pallipes	Small Indian Mongoose	,,	पूर्वी राजस्थान, पश्चिमी राजस्थान
	5.4.17	H. fuscus	Brown Mongoose	,,	दक्षिणी राजस्थान
	5.5.18	H. smithi	Ruddy Mongoose	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
6.	कुल हायनिडी (Hyaenidae)				
	6.1.19	Hyaena hyaena hyaena	Striped Hyena	जरख, जरखड़ा, जरखा	सम्पूर्ण राजस्थान
7.	कुल केनिडी (कुत्ता वर्ग) (Canidae)				
	7.1.20	Canis lupus pallipes	Wolf	गंडकडियो नाहर, भेडिया छाली नार, वारगड़ा	दक्षिण-पूर्वी, दक्षिणी पश्चिमी राजस्थान
	7 2.21	C. aurcus aureus aureus	Jackal	गीदड़, हिंयालिया, सियालिया, सालिया	सम्पूर्ण राजस्थान
	7.3.22	Vulpes vulpes pusiila	Red Fox	लोमडी, लूंकी, लूंगा, खेंकडी, फियावरी,	सम्पूर्ण राजस्थान

7.4.33	U. bengalensis	Indian Fox	,	,,
7.5.24	Cuon alpinus	Dhole or Wild Dog	लंगली कुत्ता, काह कूतरा, वरी कूतरा	सरिस्का, रणथम्भोर,
8. कुल उर्सिडी (Ursidae)				
8.1.25	Melursus ursinus	Sloth Bear	रींछ, रींछडा, भालू	रणथम्भोर, दक्षिण पूर्वी, दक्षिणी राजस्थान
9. कुल मुस्टेलिडी (Mustelidae)				
9.1.26	Lutra perspicillata sindica	Smooth Indian Otter	जलमानुष, उदबिलाव, जलमानपा	सम्पूर्ण राजस्थान
9.2.27	Mellivora capensis	Ratel, Honey Badger	बूच, बूट	दक्षिण राजस्थान
10. कुल ऐरीनेसिडी (Erinaceidae)				
10.1.28	Hemiechinus auritus collaris	Longeared Hedgehog	फाऊ, फाऊ चूहा भूईन्दडा, फाक्ला, सूलिया अन्तर चूहा, सेव सूलिया ससुलिया, फाऊ कांटा, गऊघोटा, ढुआ ढुआ, काँटिया	राजस्थान के रेगिस्तानी एवं मैदानी क्षेत्र, विशेषकर शुष्क

10.2.29	Paraechinus micropus micropus	Pale Hedgehog	फाऊ, फाऊ चूहा	पश्चिमी राजस्थान
11. कुल सोरीसिडी (Soricidae)				
11.1.30	Suncus murinus sindensis	Grey Musk Shrew	सुनसुनिया, छछुन्दर, छछुन्दरी	सम्पूर्ण राजस्थान
11.2.31	S. stoliczkanus leucogenus	Anderson's Shrew	,,	पश्चिमी राजस्थान
11.3.32	S. S. subfulvus	—	,,	पश्चिमी राजस्थान
11.4.33	Crosidura pergrisea	—	,,	पश्चिमी राजस्थान
12. कुल टेरोपोडिडी (Pteropodiae)	zarudnyi			
12.1.34	Rousettus lecheuaulti lechcnaulti	Fulvous fruit Bat	बागल, बल बागल बागोल, फग	झालावाड़, अजमेर, जोधपुर
12.2.35	R. arabicus	—	,,	पश्चिमी राजस्थान

12.3.36	Pteropus giganteus giganteus	Flying Fox	,,	सिरोही, पाली, जयपुर, जोधपुर, डूंगरपुर, बूंदी, अजमेर, बांसवाडा, उदयपुर, झालावाड, झुन्झुनु
12.4.37	Cynopterus sphinx sphinx	Short-nosed Fruit Bat	,,	बांसवाडा, बूंदी, उदयपुर, भरतपुर
13. कुल राईनोपोमेटिडी (Rhinopomatiade)				
13.1.38	Rhinopoma microhyllum kinneari	—	चमगादड, चकचूंदर सामीसूलिया, चामचीड, चमचेड	जोधपुर, झालावाड, सवाई माधोपुर, नागौर
13.2.39	R. hardwickie hardwickie	—	,,	जोधपुर, डूंगरपुर, झालावाड, बूंदी, अजमेर, झूंझनु, उदयपुर,
13.3.40	Kerivoula picta	Painted Bat	,,	अलवर

14. कुल इम्बेलोनूरिडी (Emballonuridae)

14.1.41	Taphozous perforatus perforatus	—	,,	जोधपुर, डूंगरपुर, बाडमेर, जैसलमेर, झालावाड
14.2.42	T. longimanus longimanus	—	,,	कोटा, अजमेर (नसीराबाद),
14.3.43	T. kachhensis kachhensis	—	,,	जोधपुर, कोटा झालावाड, बूंदी, टौंक अजमेर, बांसवाडा, डूंगरपुर, सवाई माधोपुर, सिरोही पाली,
14.4.44	T. nudiventris kachhensis	—	,,	प० राजस्थान
14.5.45			,,	
14.4.46	T. melanopogon	—	,,	उदयपुर

15. कुल मेगाडर्मेटिडी (Megadermatidae)				
15.1.47	Megaderma lyra lyra		,,	जोधपुर, सवाइ, माधोपुर, भूंझनु, कोटा, बांसवाडा, झालावाडा, अजमेर, डूंगरपुर, बूंदी, टोंक सिरोही
16. कुल राईनोलोफिडी (Rhinolophidae)				
16.1.48	Rhinolophus lepidus lepidus	—	,,	बीकानेर, बूंदी, सवाई, माधोपुर
19.2.49	Hipposideros vus pallidus	—	,,	जोधपुर, झालावाड, भरतपुर
16.3.50	H. bicolor pallidus	—	,,	प० राजस्थान
17. कुल मोलोसिडी (Molossidaa)				
17.1.51	**Tadorida tragota**	—	,,	प० राजस्थान
17.1.52	**Tadorida aegyptiaca thomasi**	—	,,	अजमेर, कोटा, बूंदी डूंगरपुर, जोधपुर

	17.2.53	T. a. sindica	—	,,	प० राजस्थान
	17.3.54	Pipistrollus mimus mimus	—	,,	जोधपुर
	17.4.55	P. m. glaucillus	—	,,	प० राजस्थान
	17.5.56	P. dormeri caurinus	—	,,	डूंगरपुर, बांसवाडा, जोधपुर
	17.6.57	P. ceylonicus subcanus	—	,,	प० राजस्थान
	17.7.58	P. kuhli kuhli	—	,,	प० राजस्थान
	17.8.59	P. k. lapidus	—	,,	प० राजस्थान
	17.9.60	P. savii	—	,,	प० रालस्थान
	17.10.61	Scotophilus heath heathi	—	,,	सवाई माधोपुर
	17.11.62	Nycticebus pallidus	—	,,	प० राजस्थान
18.	कुल सिरिडी (Sciuridae)				
	18.1.63	Petaurista petaurista philippensis	Large Brown Flying Squirrel	उडन गिलहरी, खाया, खानबोला	दक्षिण राजस्थान (सीतामाता अभयारण्य)

18.2.64	Funambulus pennanti	Fivestriped Palm squirrel	गिलहरी, गिलावरी, टाली, खली, टीलोडी	सम्पूर्ण राजस्थान
19. कुल मुरिडी (Muridae)				
19.1.65	Uandeleuria oleracea spadicea	Longtailed Tree Mouse	चूहा, मूसा, मुसी, उन्दरा	सम्पूर्ण राजस्थान
19.2.66	Gerbillus nanus indicus	—	,,	राजस्थान के रेतीले भाग
19.3.67	Gerbileus gleadowi	—	,,	,,
19.4.68	Tatera indica indica	Indian Gerbille	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
19.5.69	Meriones hurrianae	Indian Desert Gerbiil	,,	रेतीले क्षेत्र
19.6.78	Rattus rattus rufeseen	Common House Rat	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
19.7.71	R. rattus cutchicus		,,	दक्षिण पश्चिमी राजस्थान

19.8.72	R. meltada pallidior	Metad		झुंझनु, नागौर, जोधपुर, पाली, श्री गंगानगर, जालोर चूरू, सिरोही तथा बाडमेर, व बीकानेर जिलों के पूर्वी भाग
19.9.73	R. gleadowi	—	,,	चूरू, बाडमेर एवं बीकानेर जिला का पूर्वी भाग
19.18.74	Mus mucculus bactrianus	—	,,	सम्पूर्ण राजस्थान
19.11.75	M. boduga boduga	Indian Field Mouse	,,	शुष्क क्षेत्र
19.12.76	M. cericolor phileipsi	— |	,,	,,
19.13.77	M. platythrix sadhu	Spiny Field Mouse		,,
19.14.78	Golunda ellioti gujerati	Bush Rat	,,	,,
19.15.79	G. ellioti wetsonl	—	,,	,,

19.16.80	Acomys cahirinus flavidus	—	,,	,,
19.17.81	Bandicota b. bengalensis	Indian Mole-Rat	घूस	सम्पूर्ण राजस्थान
19.18.82	Nesokia indica	—		
20. कुल हिस्ट्रीसिडी (Hystricidae)				
20.1.83	Hystrix indica indica	Indian Porcupine	सेही, हेली, सेली	सम्पूर्ण राजस्थान
21. कुल लैपोरिडी (Leporidae)				
21.1.84	Lepus nigricollis ruficaudatus	Rufostailed Hare	खरगोश, सुस्सा हायला, हां हां, हूंड़ा, खरगोश	सम्पूर्ण राजस्थान
21.2.85	L. n. dynamus	Desert Hare	खरगोश, सुस्सा, खरगा, डगल, सुलिया	शुष्क एवं अर्द्ध शुष्क क्षेत्र
21.3.86	L. n. rajput	—	—	—
22. कुल बोविडी (Bovidae)				
22.1.87	Gazella gazella bennetti	Chinkara	छींकला, चिंकारा	सम्पूर्ण राजस्थान, विशेषकर पश्चिमी भाग

22.2.88	**Antilope cervicapra rajputanae**	Blackbuck or Indian Antelope	काला हिरण, कालीया, कारेलो	,,
22.3.89	Tetracerus quadricornis	Fourhorned Antelope or Chowsinga	चौसिंगा, बुटार	कुंभलगढ, फुलवारी की नाल, सरिस्का टाडगढ, रावली एवं सीतामाता अभयारण्य
22.4.90	Boselaphus tragocamelus	Nilgai or Blue Bull	नील-गाय, रौंज, रोजड़ा, रोई	सम्पूर्ण राजस्थान विशेषकर मैदानी क्षेत्र
23. कुल सरविडी (Cervidae)				
23.1.91	Cervus unicolor	Sambar	सांभर, सांभरी	सघन वन क्षेत्र
23.2.92	Axis axis axis	Chital or Spotted deer	चीतल	,,
23.3.93	Axis porcinus	Hog Deer	पाडा	भरतपुर राष्ट्रीय उद्यान**
23.3.94	Tregulus meminna	Indian Chevrotain or Mouse Deer	पोंखडा	दक्षिणी राजस्थान

24. कुल स्यूईडी (Suidae)				
24.1.95	Sus scrofa cristatus	Indian Wild Boar	सुअर, जंगली सुअर, हर भण्डूरा	सम्पूर्ण राजस्थान
25. कुल मेनीडिडी (Manididae)				
25.1.96	Manis crassicaudata	Indian Pangolin	सेलो, हेलो, हाला, हाला हूडा, हालाहूर	सम्पूर्ण राजस्थान
26. कुल मेनोटिडी (Wanatidae)				
26.1.97	Platinista gengetica	Gangetic Dolphin	जलपरी	चम्बल नदी

* तिवारी (1985) के आधार पर शामिल किया गया।

** सक्सेना (1975) के आधार पर शामिल। अगस्त 1972 की विनाशकारी बाढ़ में तत्कालीन भरतपुर पक्षी अभयारण्य के ज्ञात तीनो हॉग-डियर (पाडा) बह गये थे।

विहीन लगते हैं परन्तु वर्षा ऋतु में वे चरागाहों में बदल जाते हैं। पश्चिमी क्षेत्र में जगह-जगह झाड़ीदार वन छितरे मिलते हैं।

अध्ययन प्रक्रिया :

स्तनधारियों की उपस्थिति सम्बन्धित सूची निजी प्रेक्षणों एवं पूर्व में प्रकाशित शोध सामग्री से तैयार की गई है। वनों के आस-पास के निवासी एवं आदिवासी जैसे भील, गरासिया, कथोडी, सहारिया आदि एवं घुमक्कड जातियों जैसे बावा, कालबेलिया, नट, बनजारा, भाट, रैबारी आदि से जंगली जानवरों के बारे में जानकारी संग्रह की गई। वन विभाग राजस्थान की गणना रिपोटों का भी साभार उपयोग किया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

राजस्थान में मिलने वाले प्राणियों की सूची सारणी 1 में प्रदर्शित की गई है। सारणी को देखने से ज्ञात होता है कि रोडेंट (कृन्तक वर्ग), किरांप्टेरा (चमगादड एवं बागल वर्ग) राजस्थान के सर्वाधिक बड़े स्तनी वर्ग हैं। बिल्ली कुल भी प्रमुखता से यहाँ पाया जाता है। बड़ी बिल्लियों (Large Cats) में बाघ तथा तेंदुआ वर्तमान में पाये जाते हैं। छोटी बिल्लियों (Lesser Cats) में घरेलू बिल्ली सहित कुल 6 प्रजातियाँ वर्तमान में ज्ञात हैं। नेवला वर्ग, कुत्ता वर्ग एवं खुरदार प्राणियों के तीन कुल बोईडी, सरविडी और स्यूइडी भी बड़ी विविधता से पाये जाते हैं।

राजस्थान में स्तनधारियों का वितरण

राजस्थान में मछली, उभयचारी, सरीसृप, पक्षी एवं स्तनधारी इन पाँच पृष्ठवंशी वर्गों में स्तनधारियों का वर्ग ही ऐसा है जिस पर मनुष्य ने बहुत ज्यादती की है। राजस्थान के पश्चिमी क्षेत्र को छोड़ कर सघन वन क्षेत्रों में बाघ एवं तेंदुआ बहुतायत मे मिलता था लेकिन अब बाघ चित्तौड़गढ़, कोटा, बूंदी, रणथम्मोर, करोली, धोलपुर, माउण्ट आबू के वन क्षेत्रों में अनिरन्तर वितरण में बचा है। रणथम्भोर (सवाईमाधोपुर) एवं सरिस्का (अलवर) में बाघ परियोजनाएं जारी हैं। दक्षिणी राजस्थान में कभी बाघ पानरवा (फुलवाड़ी का नाल) कुम्भलगढ़, बावदड़ा, मन्तुवन क्षेत्र, पागा मगरा, जयसमन्द, नालमोस्वी, झाडौल, सज्जनगढ़, जरगा, धरियावद, वेडाबल आदि जगह काफी संख्या में मिलते थे। इनका शिकार करने के लिये तत्कालीन शासकों ने जगह-जगह शिकार टॉवर' बनवाये जिन्हें स्थानीय भाषा में 'शिकार ओदी' कहते हैं। आज भी माछला मगरा, बाँकी, बाघदडा, उदयसागर, देबारी, पसाड(गोगुन्दा), सोमघाटा, नाहरमगरा, पाबा (झाडोल), जयसमन्द आदि जगह शिकार ओदियाँ देखी जा सकती हैं। इनमे कइयों के नाम में बाघ शब्द का शामिल होना अपने आप में ही उस जमाने मे बाघों की बहुतायत का संकेत करता है। जयपूर में झालाना डूंगरी तथा अलवर में बडोंद जैसी जगहो पर भव्य शिकार ओदियाँ बनी हुई हैं। उस समय शिकार का समय सर्दी के मौसम से शुरू होता था। प्रायः राणा लोग सुअर से तथा राजकुमार तेन्दुए के शिकार से सीजन की शुरुआत किया करते थे। तेन्दुआ अपेक्षाकृत

ज्यादा संख्या में अधिक दूर-दूर तक सघन वन क्षेत्रों में वितरित हैं। जिन आवासों में बाघ समाप्त हो चुका हैं वहाँ अभी भी तेन्दुआ बचा हुआ है। स्याहगोश तो अब अत्यन्त दुर्लभ हो चला है।

कुत्ता वर्ग भी अनिष्ट का बहुत शिकार हुआ है। भेड़िया बहुत कम संख्या में रह गया है। वर्तमान में इस जाति की ज्यादा उपस्थिति पश्चिमी राजस्थान की ओर है। पश्चिमी राजस्थान में कभी यह काफी मिलता था लेकिन अब तेजी से कम हो गया है। गीदड़ भी दक्षिणी राजस्थान को छोड़ शेष क्षेत्रों में काफी कम हो चला है। यही हाल जंगली कुत्ते का है। सरिस्का में तीन तथा सवाईमाधोपुर जिले में रणथम्भोर को छोड़कर जंगली कुत्ता लगभग समाप्ति की ओर है। दक्षिणी राजस्थान में उदयपुर संभाग में यह प्राणी झुण्डों में मिलता था परन्तु अब इसके होने के कोई संकेत नहीं हैं।

दक्षिणी राजस्थान में झाडौल, कोटड़ा, प्रतापगढ़, धरियावद, सीतामाता के पूरे क्षेत्र में कभी उड़न-गिलहरी मिलती थी। संभवतः अब यह सिमटती हुई सीतामाता अभयारण्य में सीमित हो गई है। उदबिलाव का भी राजस्थान में भारी विनाश हुआ है। विशेषकर दक्षिणी राजस्थान में यह बहुत कम बचा है। दक्षिणी राजस्थान के उदयपुर जिले में कई जलाशयों जैसे फूटा तालाब (यूर) उदयसागर, पिछोला, आयड़ नदी, जयसमन्द, फतहसागर आदि में 1930 के आस-पास तक उदबिलाव बहुतायत में बताये जाते हैं। कुम्भलगढ क्षेत्र में आदिवासी लोग उदबिलाव (जलमानषा) जैसे परन्तु उससे भिन्न प्राणी 'झल्ला' का जिक्र भी करते हैं जो उदबिलाव से अधिक काला बताया जाता है। वर्तमान में छानबीन करने पर अभी तक यह प्राणी नहीं दिखा है। हो सकता है यह 'भ्रम' उदबिलाव का मौसम के अनुसार फर का रंग बदलने से फैला हो। उदयपुर संभाग में रीछों की संख्या भी तेजी से कम हुई है। 1932 में प्रसिद्ध प्राणीविशेषज्ञ श्री रजा तहसीन के पिता ने कमलनाथ वन क्षेत्र से एक हिमालयन रीछ का भी शिकार किया था। संभवतः यह किसी मदारी से छुड़ाकर जंगल में भगोड़ा बनकर पहुँचा था। माउस डीयर भी 1930 के दशक में दक्षिणी राजस्थान में कई जगह बताया जाता है। 1932 में अदकालिया गांव के पास श्रीतहसीन के पिताजी ने तीन माउस डीयरों का शिकार किया था। काला हिरण, चिंकारा यों तो सारे प्रान्त में मिलते हैं परन्तु शुष्क क्षेत्रों में, विशेषकर पश्चिमी राजस्थान में इसकी सघनता ज्यादा है। नीलगाय मैदानी इलाकों में मिलती हैं। सांभर, चीतल वनों एवं घास वाले क्षेत्रों तक सीमित हैं। पश्चिमी राजस्थान में इन हिरणों की अनुपस्थिति है। कुछ अभयारण्यो को छोड़कर शेष जंगलों में इनका भारी विनाश हुआ है। पेंगोलिन ज्यादातर वनाच्छादित क्षेत्रों में मिलता है तो गंगा डालिफन चम्बल नदी में मिलती है।

कुन्तक वैसे तो सारे राजस्थान में फैले हैं परन्तु पश्चिमी राजस्थान में इनकी उपस्थिति कुछ ज्यादा ही है। ये प्राणी शुष्क भोजन ग्रहण कर जीवन-यापन कर लेते हैं तथा पानी की अनुपस्थिति सह लेते हैं। चयापचय में पैदा हुआ जल इनके जीवन की आवश्यकता पूरी करता है। कीड़े खाने वाले चमगादड़ प्रायः सभी क्षेत्रों में फैले हैं। "पेन्टेड बैट" अलवर जिले में ततारपुर गाँव के पास एक जगह से ही ज्ञात है। राजस्थान के पुराने किलों के अनेक तरह के चमगादड़ों का बसेरा है। फल खाने वाली बागलें दक्षिणी एवं पश्चिमी पूर्वी राजस्थान में ज्याद फैली हुई है क्योंकि इन क्षेत्रो में उपयुक्त जाति के

फलदार वृक्ष जैसे गूलर, बरगद, बहेड़ा, महुआ आदि पाये जाते हैं जिनसे रात्रि में इनको न केवल भोजन प्राप्त होता है बल्कि दिन में लटकने का स्थान (रूस्ट) भी मिलता है। उदयपुर जिले के झाड़ौल तहसील के दमाना गाँव के पास टीरोपस जाईजेन्टियस नामक बागल की एक कलोनी बबूल (Acacia nilotica sp, indica) पर भी पाई गई है जो इस प्रजाति के लिये असामान्य आवासीय वृक्ष माना जाता है।

राजस्थान में कभी सिंह, चीता, भारतीय गेण्डा जैसे प्राणी भी पाये जाते थे। जो विभिन्न कारणों से इस भूभाग से बिलुप्त हो गये। राजस्थान में चीता बिल्ली होने की भी सूचना है परन्तु इस तथ्य की सत्यता सिद्ध होना बाकी है। घना राष्ट्रीय उद्यान में श्री बी० एस० सक्सेना ने इसके होने की सूचना दी है। व्यक्तिगत सम्पर्क करने पर श्री रजा तहसीन ने इस जाति की बिल्ली का उदयपुर संभाग में भी होना बताया है।

स्तनधारियों के अस्तित्व की समस्या :

शिकार, आबास विनाश, सूखा आदि स्तनधारियों के विनाश का मुख्य कारण है। लोमड़ी, गीदड़ आदि को चमड़े के लिये मारा जाता है। भेड़िया पालतू भेड़-बकरियों का दुश्मन होने के कारण निशाना बनाया जाता है। भेड़-बकरियाँ राजस्थान की अर्थ-व्यवस्था में अपना विशेष महत्व रखती हैं। वनों में प्राकृतिक भोजन की कमी के कारण बाघ व तेन्दुआ, विशेषकर तेन्दुआ जंगलों में चरने वाले पशुओं पर निर्वाह करता है जिससे पशु-पालक इसे अपना शत्रु समझते हैं। अनेक लोक-दवाओं में उपयोग हेतु भी जन्तु नष्ट किये जाते हैं। उड़नगिलहरी, जिसे दक्षिणी राजस्थात में आदिवासी रवाया कहते हैं, लोग दवाओं में उपयोग एवं आवास विनाश के कारण नष्ट-हुई हैं। नन्हें शिशुओं के लगातार रोने पर उड़न-गिलहरी को मारकर उसकी हड्डी बच्चे के गले में बाँधी जाती है। लोगों का विश्वास है कि इससे बच्चा रोता नहीं है तथा रात में डरता भी नहीं है। उदयपुर संभाग में अब उड़न गिलहरी अनेक क्षेत्रों में समाप्त हो गई है। अतः इन क्षेत्रों में अब बच्चों के रोने का लोक-उपचार चमगादड़ की हड्डी से किया जाता है। उड़न गिलहरी व चमगादड़ में अनेक विभिन्नताएँ होने के बावजूद समानता यह है कि दोनों रात्रिचर हैं तथा दोनों उड़ते हैं (उड़न गिलहरी ग्लाईडिंग करती है)। चूंकि दोनों रात्रिचर हैं अतः रात्रि में बच्चों के रोने, रात्रि मे डरने एवं रात्रि में बुरे सपने आने जैसे रात्रि-रोगों के इलाज में जन-साधारण इन्हें उपयोगी मानता है।

आदिवासी क्षेत्र में 'ऐडा' का प्रचलन है। ऐडा हेतु मकर संक्रान्ति अर्थात् प्रति वर्ष 14 जनवरी को सामूहिक शिकार कार्यक्रम होता है। पुरुष इस दिन सुबह से ही शिकार हेतु बाहर निकल जाते हैं। स्त्रियों के उपहासों से बचने के लिये वे तब तक घर नहीं लौटते जब तक कि शिकार हाथ न लगे। हाथ लगे शिकार को प्रसाद स्वरूप सभी को खिलाया जाता है ताकि शिकारी का शिकार किया जाना सत्यापित हो जाये। प्राचीन समय में कई शिकारी मिलकर सांभर, चीतल, सूअर, सेनी आदि जानवरों को मारते थे लेकिन बाद में इनके समाप्त हो जाने पर एकल रूप में खरगोश, पक्षी एवं अन्य छोटे जानवर ज्यादा मारे जाने लगे। दक्षिणी राजस्थान में कथोड़ी नामक आदिवासी लंगूर को खाना पसंद करते हैं। दक्षिणी राजस्थान में कुछ जातियाँ जैसे बाबा-जोगी आदि तो लोमड़ी, गीदड़, जरख आदि प्राणियों को

भी खाने के काम में लेते हैं। बावरिया, नट, सांसी आदि लोग शिकार कार्य पसंद करते हैं। विभिन्न स्तनधारियों को विभिन्न जातियों के लोगों द्वारा खाने की पसंद सम्बन्धी जानकारी सारणी 2 में अंकित है। दक्षिणी राजस्थान में प्रायः आदिवासी लोग मनौतियाँ मनाने के लिये गर्मी के मौसम में वनों में आग लगाते हैं जिससे अनेक प्राणी नष्ट हो जाते हैं। अनेक प्राणी सड़कों पर वाहनों से कुचल कर मारे जाते हैं।

सारणी 2

विभिन्न लोगों की पसंद के खाद्य स्तनधारी

नाम स्तनधारी	मानव समुदाय का नाम जो खाने में पसंद करता हैं
1. लंगूर	कथोडी
2. चूहे	कथोडी
3. सांभर, पेंगोलिन, चीतल, काला हिरण, सेहीं, चिंकारा, चौसिंगा, सूअर, खरगोश,	सभी वर्ग*
4. लोमडी, गीदड, जरख, जंगली बिल्ली बाबा, जोगी	
5. नीलगाय	

*सभी वर्ग का आशय गैर आदिवासी एवं कथोडी, भील, गरासिया, नट, बावरिया आदि जातियों से हैं।

कुछ समुदाय लुकछिप कर न केवल बड़े अपितु कई छोटे जानवरों को भी विभिन्न कारणों से मारा जाता है। कद्दू कुल की बेलों से ज्यादा फल लेने के लिये झाऊ चूहों के काँटों की धूणी दी जाती है। काँटे प्राप्त करने के लिये कई यातना भरे तरीकों से झाऊ चूहे मारे जाते हैं। मिट्टी की मटकी में बंद कर भूखा मारना, उबला पानी डालना, लकडी से प्रहार करना आदि आम तरीके हैं जिनसे झाऊ चूहे मारे जाते हैं। पशुओं को मुँह तथा खुर की बीमारी होने पर दक्षिणी राजस्थान में घरों के सामने खड्डा खोद कर उसमें झाऊ चूहे को दबा दिया जाता है तथा उस पर से पशुओं को गुजारा जाता है। खेतों से झाऊ चूहे पकड़ कर उन्हें घरों में घरेलू चूहों को समाप्त करने के लिये छोड़ दिया जाता है। इस क्रम में दूध पीते शिशु माताओं से बिछुड़ कर मारे जाते हैं। इसी तरह के अंधविश्वास के कारण छछुन्दर को मारा जाता है। ग्रामीण क्षेत्रों में विश्वास है कि यदि छछुन्दर छाछ बनाने के बर्तनों को छू ले तो छाछ गन्दी हो जाती है तथा दुर्गन्ध देने लगती है। इसी तरह यह माना जाता है कि यदि लोमड़ी श्मशान में बोले तो कोई न कोई आदमी मरता है। बिल्ली रास्ता काट जाये तो

अपशकुन माना जाता है। घरों में चमगादडों के पाये जाने पर यह कह कर मार दिया जाता है ये वीरानी लाने वाले जीव हैं।

टोडीकेट-नामक बिज्जू (कई जगह रटेल को बिज्जू कहते हैं। परन्तु दक्षिणी राजस्थान में सीवेट को बिज्जू कहा जाता है एवं रटेल को बूट कहा जाता है) मीठा खाने का शौकीन है अतः कई बार गाँव में किराणा की दूकान में ये गुड, शक्कर, चीनी आदि मीठी वस्तुओं को खाने के लिसे घुस जाते हैं एवं कई बार दुकान मालिकों द्वारा मारे जाते हैं। दक्षिणी राजस्थान के ग्रामीण क्षेत्रों में विश्वास है कि बिज्जू रात्र में सोते हुये छोटे बच्चों को उठा ले जाते हैं इसलिये घरों में लोग बिज्जू के आने पर उसे तुरन्त खदेड देते हैं।

सुरक्षा उपाय :

बृहत स्तर पर आवास-सुधार एवं जन-शिक्षण द्वारा स्तनधारियों एवं अन्य प्राणियों को बचाया जा सकता है। लोगों के अंधविश्वासों को दूर किया जाना जरूरी है। अरावली वृक्षारोपण जैसी आवास सुधार की योजनायें तथा भू एवं जल संरक्षण के कार्य वृहत स्तर पर जरूरी हैं। वनों से पुराने एवं सूखे वृक्षों के हटाये जाने से रोका जाना चाहिये। उनके कोटरों एवं फटानों में चमगादड, बिज्जू, व पक्षी बसेरा लेते हैं। वन फलों के वृक्ष जैसे गूलर, बरगद, आंवला, महुवा, ढीमर, गौंदा, गौंदी, बेर आम, करौंदा, नीम, सीताफल आदि का यथोचित रोपण जरूरी है ताकि फल खाने वाले जीवों को भोजन मिलता रहे। आग की घटनाओं पर नियंत्रण होना चाहिये तथा लोगों के अंधविश्वासों को दूर किया जाना चाहिये। गर्मी की ऋतु में वनों में पेयजल की व्यवस्था होनी चाहिये ताकि प्राणी भटक कर बाहर न आवें। उचित स्थानों पर एनिकट, जलाशय बनवा कर या पम्प सेट लगवा कर इस दिशा में प्रयास करना उचित होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० ईश्वर प्रकाश, प्राणी सर्वेक्षण विभाग जोधपुर, डॉ० प्रभाकर जोशी, श्री वी० एस० सक्सेना, श्री रजा तहसीन, श्री गुणवंत सिंह झाला का विशेष आभारी है जिन्होंने राजस्थान के स्तनधारियों पर विशेष जानकारी उपलब्ध करवाई है। विभिन्न अभयारण्यों की प्राणी गणना सूचियों से विभिन्न जानकारी संग्रह की गई है अतः वन विभाग, राजस्थान का मैं विशेष आभारी हूँ जिन्होंने उक्त सूचियाँ उपलब्ध करवाईं।

निर्देश

1. आडवानी, आर० तथा जैन, ए० पी० : JBNHS, 1982, 79 (3), 662-63.
2. अडवानी आर० तथा माथुर, आर० पी० : JBNHS, 1982, 79 (2), 408.
3. बलसारा, एफ० एफ० :Hornbill, 1980, **2** , 28.

4. बेटीज, जे० जे०, हरीसन, डी० एल० तथा मूर्ति, एम० : JBNHS, 1994, **91** (1) , 1-15.

5. लिवेसी, टी० आर०, : JBNHS, 1922, **28** (3) , 795.

6. प्रकाश, ई० : Ecology and Zoogeography of Mammals. In Environment analysis of desert. 1975, 448-487.

7. प्रकाश, आई० : Mammals of the Thar Desert. 1994.

8. प्रेटर, एस० एच० : The Book of Indian Animals, 1980.

9. रहमानी, ए० आर० : JBNHS, 1991, **88** (1) , 35-46.

10. राना, बी० डी तथा सोनी, बी० के० : JBNHS, 1981, **78** (2) , 370-72.

11. राइस, जी० जी० : JBNHS, 1991, **88** (1) , 63-66.

12. रुकमाकर, एल० सी०: JBNHS, 1983, **80** (3) , 555-62.

13. सक्सेना, वी० एस०: Fauna and Flora of Bharatpur bird sanctuary. 1975.

14. साही, एस० पी०: JBNHS, 1982, **79** (3), 493-502.

15. सिंह, एल० के० तथा शर्मा, आर० के०: JBNHS, 1985, **88** (3) , 648-653.

16. सिन्हा, वाई० पी०: JBNHS, 1980, **77** (3) , 465-70.

17. तहसीन, आर० : JBNHS, 1980, **77** (3), 498.

18. तहसीन, आर० : Tiger, 1986, XIII (2) : 23.

19. तिवारी, एस० के० : Zoo-geography of India and South East Asia. 1985.

20. त्रिपाठी, जे० सी०, खन्ना, वी० तथा चोपडा आर० एन० : चीतल, 1985, **26** (3-4) , 12-23.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

देहली विभव की प्रकाश संवेदिता का कैथोड किरण दोलनलेखीय अध्ययन

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त—जुलाई 31, 1995]

सारांश

ओजोनित्र उत्तेजन के अन्तर्गत, वायु के विभिन्न दाबों पर 200 वाट 220 वोल्ट तापदीप्त कॉच लैंप तथा रंगीन प्रकाशों द्वारा किरणन में देहली विभव V_m में ह्रास का प्रेक्षण हुआ। इसकी व्याख्या धनात्मक जोशी प्रभाव $+\Delta i$—विनर्जन धारा की प्रकाशिक वृद्धि के आधार पर की गई है।

Abstract

An oscillographic study of the photosensitivity of the threshold potential. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut Callege, Meerut.

The threshold potential, V_m in air at various gas pressures under ozonizer excitation has been found to be lowered under irradiation from a 200 watt 220 volt incandescent glass lamp and also under coloured lights. This has been accounted on the basis of positive Joshi effect—a photo-increase of the discharge current.

आर्गन देहली विभव V_m के अध्ययन से उद्घाटित हुआ कि अंधकार में देहली विभव V_m (D) की तुलना से प्रकाश के अन्तर्गत देहली विभव V_m (L) अधिक होता है[1] अतः ड्यू मोण्ट कैथोड किरण दोलनलेखी की सहायता से उपर्युक्त अध्ययन को वायु में विस्तृत किया गया।

प्रयोगात्मक

ओजोनित्र उत्तेजन के अन्तर्गत वायु मे जोशी प्रभाव $\pm\Delta i$ के प्रस्तुत अध्ययन को ड्यू माण्ट कैथोड किरण दोलन लेखी की सहायता से पूर्व प्रकाशित [2-4] विधि के अनुसार किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

कुछ मिमी (Hg) से लगभग वायुमंडलीय दाब के प्रस्तुत परास में वायु में अंधकार में देहली विभव V_m (D) की अपेक्षा, किरणन के अन्तर्गत देहली विभव V_m (L) का मान कम था। यह ह्रास उच्च तथा मध्यम दाबों पर लगभग 15% तथा निम्न परास से लगभग 3%।

प्रयुक्त प्रकाश की आवृत्ति के क्रम में ह्रास की मात्रा अपेक्षित है, जिसका निर्धारण तल के कार्य फलन की अपेक्षा आपाती फोटॉन की ऊर्जा के आधिक्य से होता है, क्योंकि तल का कार्य फलन इतना कम होता है कि तल लाल प्रकाश के लिए भी संवेदनशील होता है।[5-8] इस अन्तिम अपेक्षा की पुष्टि लेखक के उन प्राप्त परिणामों [9] से होती है जिनमें वायु में देहली विभव पर रंगीन प्रकाशों का अध्ययन किया गया था। परिणामों से प्रकट होता है कि देहली विभव निम्नलिखित क्रम में हैं :

V_m (अंधकार) $>$ V_m (लाल) $>$ V_m (नीला) $>$ V_m (श्वेत)

50 या 500 हर्ट्स आवृत्ति तथा इसके हार्मोनिकों के साथ विसर्जन धारा में अनगिनत उच्च आवृत्तियाँ सम्मिलित रहती हैं जो प्रयुक्त सी० आर० ओ० की लघु तरंग संवेदनशीलता, 10^4 हर्ट्स कोटि की, सीमा के भी सम्भवतः परे होती हैं। इन नियमित बार-बार आने वाले घटकों के साथ, कुछ क्षणिकाओं का भी प्रेक्षण हुआ। मुख्य तरंग आकृति पर अध्यारोपित ये उच्च आवृत्तियाँ न केवल $-\Delta i$ बल्कि $+\Delta i$ का भी मुख्य उद्गम प्रदर्शित करती हैं।

जब अनुप्रयुक्त विभव V_m (L) और V_m (D) के मध्य स्थित होता है तब अंधकार में, धारा का ऑसिलोग्राम एक सामान्य-सा होता है जो केवल मूल निविष्ट आवृत्ति का होता है। किरणन पर, एच० एफ० अपनी उपस्थिति तात्क्षणिक तथा उत्क्रमणीय रूप से प्रकट करती हैं (सी आर ओ पर कोई काल पश्चता संसूचनीय नहीं थी)। इन एच एफ के जुड़जाने से वर्धित धारा $+\Delta i$ की रचना करती है। ऑसिलोग्राफीय अध्ययन पर आधृत, $+\Delta i$ की यह क्रियाविधि एक नवीन प्रस्ताव है।

ओजोनित्र पर अनुप्रयुक्त विभव को अंधकार में धीरे-धीरे बढ़ाने पर, उपर्युक्त $+\Delta i$ के समान i_d आकृति सामान्य रहती है, एक विशिष्ट विभव तक पहुँचने पर, एकदम तथा (सामान्यतः) अनुत्क्रमणीय रूप से, एच एफ रेखाएँ प्रकट होती हैं और साथ ही संगत त्वरित धारा i_D की आकृति समान है। इस प्रकार, $+\Delta i$ की अवस्थाओं में, प्रकाश का प्रभाव बिल्कुल वैसा ही है जैसा कि उच्चतर विभव का, क्योंकि इन दोनों में से प्रत्येक कारक तरंग आवृति में एच एफ रेखाएं जोड़ सकता है। दूसरे शब्दों में अधिवोल्टता या प्रभावी विभव $(V-V_m)$ का मान दोनों अवस्थाओं में बढ़ जाता है।

V_m (D) से ऊपर के विभवों पर, प्रकाश का कार्य है एच एफ के आयामों का तात्क्षणिक तथा उत्क्रमणीय रूप से दमन करना, जिससे इनमें कुछ का अंधकार में धारा की आकृति से पूर्णतः विलोपन हो जाता है। इस प्रकार, इन अवस्थाओं में, प्रकाश का अंतिम या परिणामी कार्य, निम्नतर विभवों पर इसके सीधे प्रभाव की तुलना में, उल्टा है। इस कथन में बल है कि एक अनुकूलतम मान के बाद,

विभव वृद्धि का प्रभाव भी इसी प्रकार से उत्क्रमणीय होता है। इन प्रेक्षणों से इस व्यापक नियम का प्रतिपादन होता है कि धारा आकृति के एच एफ घटकों पर प्रकाश का वही प्रभाव पड़ता है जो विभिन्न विभव परासों में उच्चतर विभव का होता है। सारणी 1 में इसका निदर्श-चित्र प्रस्तुत है :

सारणी 1

धारा के एच एफ घटकों पर प्रकाश तथा उच्च विभव का प्रभाव

विभव परिसर	अंधकार में धारा आकृति	प्रकाश का प्रभाव	उच्च विभव का प्रभाव
V_m (L) से नीचे	कुछ नहीं	कुछ नहीं ↘ ——	↘ कुछ नहीं
V_m (L) तथा V_m (D) से नीचे	सामान्यः एच एफ अनुपस्थित	एच एफ का जनन होता है ↘ ——	↘ कुछ नहीं
V_m (D) तथा V (अनुकूलतम)	एच एफ की प्रचुरता	एच एफ का दमन होता है ↘ ——	↘ और अधिक एच एफ का जनन होता है
V (अनुकूलतम) से ऊपर	एच एफ घटनी आरम्भ होती हैं	एच एफ का दमन होता है	एच एफ को घटाता है

दोनों प्रभावों की तुलना अंकित विकर्ण तीरों के सहारे करने से ज्ञात होगा कि जहाँ तक एच एफ घटकों, विशेषतः उनके आपेक्षिक भाग का सम्बन्ध है, किरणन के दौरान किसी निकाय का व्यवहार ऐसा होता है जैसे कि कार्यकारी विभव अनुप्रयुक्त विभव से अधिक है। ये उक्तियाँ संभरण आवृत्ति तथा इसके निकट के हार्मोनिकों पर लागू नहीं होती हैं।

संक्रमण $+\Delta i \leftrightharpoons -\Delta i$ तथा प्रेक्षित विभव, दाब तथा (किरणन) तीव्रता के साथ $-\Delta i$ का परिवर्तन जोशी सिद्धान्त[7] के पूर्णतः अनुकूल है। अधिकतम $-\%\Delta i$ के लिए अनुकूलतम कारकों की दृष्टि से ये अवस्थाएँ, इलेक्ट्रोड भित्तियों पर एक स्थायी जोशी तल तथा ऋणात्मक आयन निर्मिति, अर्थात् V_m से तनिक ऊपर का विभव और माध्यमिक दाब के लिए भी अनुकूल हैं। मैस्से[10] के अनुसार, सम्भव इलेक्ट्रॉन अनासक्ति अभिक्रियाएँ अपने प्रभाव के क्रम में हैं: (अ) धातु धरातलों के साथ संघट्टन (आ) उत्तेजित परमाणुओं के साथ संघट्टन, (इ) विकिरण का अवशोषण तथा (ई) तीव्र गतिवाले इलेक्ट्रॉन, आयन तथा अणुओं के साथ संघट्टन।

इनमें से, काँच ओज़ोनित्र के लिए (अ) लागू नहीं होता है, दृश्य प्रकाश के लिए (इ) अप्रभावी है क्योंकि आवृत्ति देहली न्यूनतम से लगभग दुगुनी होनी चाहिए। प्रक्रिया (ई) न्यूनतम प्रभावी होने के

कारण, ऋणात्मक आयनों के नष्ट होने के लिए, (आ) मुख्य क्रियाविधि है, जो उतनी ही अधिक होती है जितना कि अनुप्रयुक्त विभव अधिक होता है। अथ च, इसी क्रियाविधि के आधार पर, उच्च विभवों पर जब कि ऋणायन घट जाते हैं, पुनः $+\Delta i$ में उत्क्रमण की अपेक्षा है। उच्च विभवों पर $+\Delta i$ के इस प्रभाव का यथार्थ में प्रेक्षण जोशी सिद्धान्त के पक्ष में एक अकाट्य प्रमाण प्रस्तुत करता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० एच० जे० अर्नीकर के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. प्रसाद, जे०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1975, **18**, 303.
2. प्रसाद, जे०, जिऑग्रिया इ कल्चरा, 1973, **25**, 880.
3. प्रसाद, जे०, रिव० रूमेन किम०, 1973, **18**, 1865.
4. प्रसाद, जे०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1973, 36, 231,
5. टॉडे, एन० आर० तथा गोपालकृष्णन, के०, 1949, प्रोसी० इन्डियन साइंस कांग्रेस, 29,171.
6. अर्नीकर, एच० जे० 1949, वही, 29, भाग 3, फिज़ि० सेक०, ऐब्स्ट, 17 तथा 18.
7. जोशी, एस० एस०, 1943, वही 29, ऐब्स्ट 98, प्रेजि० ऐड०, केम० सेक०, 51.
8. देव, पी० जी०, 1949, वही, 29, ऐब्स्ट 19.
9. प्रसाद, जे०, 1957 (अप्रकाशित परिणाम).
10. मैस्से, एच०एस०डब्लु०, 'Negatlve Ions', फिज़िकल ट्रैक्ट्स, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1938.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 38, No. 4, 1995

फोरियर जैकोबी श्रेणी के नारलुंड माध्यों द्वारा फलन का सन्निकटन

मनीषा शर्मा
गणित अध्ययन, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (मध्य प्रदेश)

[प्राप्त—मई 6, 1995]

साराश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य ज्ञात प्रमेय की तुलना में अधिक व्यापक रूप से फूरियर जैकोबी श्रेणी के नारलुंड माध्यों द्वारा फलन का सन्निकटन कर आधारित प्रमेयों को सिद्ध करना है।

Abstract

Approximation to a function by Norlund means of its Fourier Jacobi series. *By* Manisha Sharma, Department of Mathematics, Vikram University, Vjjain (M. P.)

The object of the present paper is to establish thecrems under more general conditions than the known theorems based or

1. परिभाषाएँ :

माना कि Σu_n दी हुई अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। माना कि $\{p_n\}$ वास्तविक तथा मिश्र अचरों का अनुक्रम है और हम लिखते हैं कि—

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots\dots\dots + p_n.$$

अनुक्रम से अनुक्रम में रूपान्तरण अर्थात्

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v S_{n-v}$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} S_v \qquad (1.1)$$

अनुक्रम $\{t_n\}$ परिभाषित होता है जो अनुक्रम $\{S_n\}$ का नारलुंड माध्य है और चरों के अनुक्रम $\{p_n\}$ का गुणांक है।

नारलुंड संकलनीयता के दो मुख्य दृष्टांत निम्नलिखित हैं—

(1) हरात्मक संकलनीयता, जब $p_n=\frac{1}{n+1}$

(2) सिजारो संकलनीयता, जब $p_n=\binom{n+S-1}{S-1}$; $S>0$

2. परिचय :

माना कि $f(x)$ कोई फलन है जो $[-1, 1]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) \in L[-1, 1];\ \alpha>-1.\ \beta>-1$$

इस फलन के लिए जैकोबी श्रेणी निम्नवत् होगी--

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha\ \beta)}(x) \tag{2.1}$$

जहाँ

$$a_n=\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\ \Gamma(n+1)\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\ \Gamma(n+\alpha+1)\ \Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)\ P_n^{\alpha,\ \beta}(x)\ dx \tag{2.2}$$

और $P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है।

हम लिखेंगे

$$F(\phi)=\{f(\cos\phi)-A\}(\sin\phi/2)^{2\alpha+1}(\cos\phi/2)^{2\beta+1}$$

A एक स्थिर अचर है।

गुप्ता[3] ने जैकोबी श्रेणी की $(N_1\ p_n)$ संकलनीयता के लिए निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की—

प्रमेय A—यदि $\{p_n\}$ अऋणात्मक तथा अवर्धमान अनुक्रम इस प्रकार है कि

$$\sum_{a}^{n} \frac{P_k}{K^{(2\alpha+3)/2} \log K}=O\left(\frac{P_n}{n^{(2\alpha+1)/2}}\right) \tag{2.3}$$

a निश्चित पूर्ण संख्या है और

$$\sum_n \frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n} < \infty \tag{2.4}$$

यदि

$$\psi(t) = \int_0^t |F(\phi)| d\phi = O\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{\log 1/t}\right) \tag{2.5}$$

ज्यों ज्यों $t \to O$

तो श्रेणी $x=1$ पर $N_1 p_n)$ संकलनीय होगी और इसका योग A होगा, यदि $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}; \beta > -\frac{1}{2}$ और प्रतिपोल प्रतिबन्ध (antipole condition)

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{(2\beta-3)/4} \, | f(x) | dx < \infty \tag{2.6}$$

b पूर्णतया संतुष्ट हो।

चौधरी[1] ने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया है।

प्रमेय B : यदि $\{p_n\}$ वास्तविक तथा अवर्द्धमान अनुक्रम ऋणात्मक अनुक्रम का गुणांक है यदि

$$\psi(t) = O\left(\frac{p(1/t) t^{2\alpha+1}}{P(1/t}\right) \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0 \tag{2.7}$$

(2.4) और (2.6) भीं संतुष्ट हो तो श्रेणी (2.1) $x=1$ पर $(N_1 p_n)$संकलनीय होगी। और इसका योग A होगा, यदि

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant \alpha < \tfrac{1}{2}, \beta > -\tfrac{1}{2}.$$

यदि प्रमेय की उत्पत्ति को ध्यान से अध्ययन करें तो यह ज्ञात होता है कि एक अतिरिक्त प्रतिबन्ध

$$\sum_a^n \frac{P_k}{K^{(2\alpha+3)/2}} = O\left(\frac{P_n}{n^{(2\alpha+1)/2}}\right), P(n) = P_n \tag{3.8}$$

का भी उपयोग किया है।

पाण्डे[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है—

प्रमेय C : यदि $\{n\}$ एक वास्तविक संख्याओं का धनात्मक, अवर्द्धमान अनुक्रम है तथा $\{n^{-(2\alpha+1)/2} P_n\}$ वर्द्धमान है—

$$\int_t^\delta \frac{|F(\phi)|}{\phi^{(2\alpha+3)/2}} \frac{P(1/\phi)}{} \, d\phi = O\{t^{(2\alpha+1)/2} P(1/t)\} \tag{2.9}$$

और यदि (2.6) भी संतुष्ट हो तो श्रेणी (2.1) $x=1$ पर $(N_1 \, p_n)$ संकलनीय होगी और योग A होगा।

जहाँ $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2}$.

हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय—माना $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का धनात्मक, अवर्द्धमान **अनुक्रम है तथा** $\{n^{-(\alpha+\frac{1}{2})p} p(1/t)\}$ वर्द्धमान है।

$$\int_t^\delta \frac{|F(\phi)|\, P(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}} d\phi = O\{t^{(\alpha+1/2)p} P(1/t)\}, \; p \geqslant 1 \tag{3.0}$$

जहाँ δ एक धनात्मक स्थिरांक है।

तो

$$t_n(1) - f(1) = \max \{o(n^{-\alpha+1/2)\,(p-1)} + o(n^{\alpha-1/2})\}$$

जहाँ $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2}$ जहाँ t_n जैकोबी श्रेणी का $(N_1 \, p_n)$ माध्य है।

3. प्रमेयिकाएँ :

हम निम्न प्रमेयिकाओं का उपयोग प्रमेय सिद्ध करने के लिये करेंगे।

प्रमेयिका 1 : माना कि α तथा β कल्पित एवं वास्तविक हैं और C एक स्थिर अचर है $n \to \infty$ तो

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-(2\alpha+1)/2} \, o(n^{\alpha-1/2}) \text{ क्योंकि } c/n \leqslant \theta \leqslant \lambda/2 \\ o(n^\alpha) \text{ क्योंकि } o \leqslant \theta \leqslant c/n \end{cases} \tag{3.1}$$

उपपत्ति के लिये देखें जेगो[5]।

प्रमेयिका 2 : यदि $\alpha > -1, \beta > -1, c/n \leqslant \theta \leqslant z - c/n$

$$P^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{-1/2} \, u(\theta) \, [\cos\left\{\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\theta + x\right\} + \frac{O(1)}{n \sin\theta} \tag{3.2}$$

जहाँ

$$u(\theta) = 1/\sqrt{\pi} \, (\sin\theta/2)^{-(2\alpha+1)} (\cos\theta/2)^{-(2\beta+1)}; \; x = -(\alpha + \tfrac{1}{2}) z/2$$

उपपत्ति के लिये देखें जेगो[5]

प्रमेयिका 3 : मना कि

$$N_n(\phi)=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{P_n}\sum_{k=0}^{n} k\,\lambda_{n-k}P_{n-k}^{(\alpha+1,\,\beta)}\,(\cos\phi)$$

जहाँ

$$\lambda_n=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\alpha+1)}\,.\,n^{\alpha+1}$$

जहाँ $0\leqslant\phi\leqslant 1/n$

$$N_n\,(\phi)=0\,(n^{2\alpha+2}) \tag{3.3}$$

क्योंकि $1/n\leqslant\phi\leqslant\lambda-1/n.$

$$N_n\,(\phi)=1/P_n\,0[n^{(2\alpha+1)}/^2\,P(1/\phi)/(\sin\phi/2)^{(2\alpha+3)/2}\,(\cos\phi/2)^{(2\beta+1)/2}$$

$$+O[n^{(2\alpha-1)/2}/(\sin\phi/2)^{(2\alpha+5)/2}\,(\cos\phi/2)^{(2\beta+3)/2}] \tag{3.4}$$

प्रमेयिका 4 :

$$\int_{\alpha}^{\pi}(\cos\phi/2)^{(2\beta-1)/2}\,|\,f(\cos\phi)-A\,|\,d\phi<\infty \tag{3.5}$$

$$\int_{0}^{1/n} t^{(2\beta-1)/2}\,|\,f(-\cos t)-A|dt=0\,(1) \tag{3.6}$$

उपपत्ति के लिये देखें जेगो[5] एवं गुप्ता [3] ।

प्रमेयिका 5 : प्रतिबन्ध (3.0)

$$\int_{0}^{t}|\,F\,(\phi)|d\phi=o(t^{(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}) \tag{3.7}$$

उपपत्ति हमें ज्ञात है कि

$$\eta(t)\equiv\int_{t}^{\delta}\frac{|F(\phi)|\,P(1/\theta)}{\phi^{(2\alpha+3)/2}}\,d\phi=O(t^{(\alpha+1/2)p}\,P(1/t))$$

अतः

$$\int_0^t | F(\phi) | P(1/\phi)\, d\phi = \int_0^t \frac{| F(\phi) | P(1/\phi)}{\phi^{(2\alpha+3)/2}} \cdot \phi^{(\alpha+3/2)}\, d\phi$$

$$= \Big[\phi^{\alpha+3/2}\, \eta(\phi) \Big]_0^t + O \int_0^t \phi^{(2\alpha+1)/2}\, | \eta(\phi) |\, d\phi$$

(खण्डशः समाकलन से)

$$= \Big[\phi^{\alpha+3/2}\, O(\phi^{(\alpha+1/2)p}\, P(1/\phi) \Big]_0^t + O \int_0^t \phi^{(2\alpha+1)/2}$$

$$O\{\phi^{(\alpha+1/2)p}\, P(1/\phi)\} d\phi$$

$$= O(t^{(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}\, P(1/t)) + O \int_0^t \phi^{(\alpha+1/2)p}\, P(1/\phi)\, d\phi$$

$$= O(t^{(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}\, P(1/t))$$

$$= \int_0^t | F(\phi) | P(1/\phi)\, d\phi \geqslant P(1/t) \int_0^t | F(\phi) |\, d\phi$$

$$\int_0^t | F(\phi) |\, d\phi = O(t^{(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}) \tag{3.7}$$

4. **प्रमेय की उपपत्ति :**

यदि $x=(1)$ पर श्रेणी S_n का n वाँ आँशिक योगफल है तो ऑब्रिकॉफ के अनुसार—

$$S_n(1) = 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1}$$

$$\times f(\cos \phi)\, P_n^{(\alpha+1,\, \beta)} (\cos \phi)\, d\phi$$

$$S_n(1) - A = 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\alpha+1} F(\phi)$$

$$P_n^{(\alpha+1,\, \beta)} (\cos \phi)\, d\phi \tag{4.1}$$

$x=1$ पर श्रेणी (2·1) का नारलुंड माध्य t_n हो तो

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k S_{n-k}(1)$$

अतः

$$t_n(1) - A = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_{n-k} \int_0^{\lambda} F(\phi) P_{n-k}^{(\alpha+1,\beta)} (\cos\phi)\, d\phi$$

$$= \int_0^{\lambda} F(\phi) N_n(\phi)\, d\phi$$

$$= \left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\lambda-\Upsilon_n} + \int_{\lambda-1/n}^{\delta} \right] F(\phi) N_n(\phi)\, d\phi$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_{4\,1} \quad \text{माना} \tag{4.2}$$

$$I_1 = O(n^{2\alpha+2}) \int_0^{1/n} |F(\phi)|\, d\phi$$

$$= O(n^{2\alpha+2}) [O(n^{-(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}]$$

$$I_1 = O(n^{-(\alpha+1/2)(p-1)}) \tag{4.3}$$

अब हम I_2 का मान ज्ञात करेंगे।

$$I_2 = O\int_{1/n}^{\delta} |F(\phi)| \left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right) P(1/\phi) (\sin\phi/2)^{-(\alpha+3/2)}\, d\phi$$

$$+ O\int_{1/n}^{\delta} |F(\phi)|\, n^{\alpha-\Upsilon_2} (\sin\phi/2)^{-(\alpha+5/1)}\, d\phi$$

अब $\quad = I_{2\cdot1} + I_{2\cdot2}$, माना

$$I_{2\cdot1} = O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right) \int_{\Upsilon_n}^{\delta} \frac{F(\phi) P(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\, d\phi$$

$$= O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right) O\left(\frac{P_n}{n^{(\alpha+1/2)p}}\right)$$

$$I_{2\cdot1} = O(n^{-(\alpha+1/2)(p-1)}) \tag{4.4}$$

अब

$$I_{2\cdot 2}=O(n^{\alpha-1/2})\int_{\gamma_n}^{\delta}\frac{|F(\phi)|}{\phi^{\alpha+5/2}}d\phi$$

$$=O(n^{\alpha-1/2})\left[\left\{\frac{1}{\phi^{(2\alpha+5)/2}}\phi^{(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}\right\}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O\left\{\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{\phi^{\alpha+7/2}}\cdot\psi^{(\alpha+3/2)+(\alpha+1/2)p}\right\}$$

$$I_{2\cdot 2}=O(n^{\alpha-1/2}) \tag{4.5}$$

अब हम I_3 का मान ज्ञात करेंगे

$$I_3=O\int_{\delta}^{\lambda-1/n}\frac{|F(\phi)|P(1/\phi)}{(\sin\phi/2)^{\alpha+3/2}(\cos\phi/2)^{\beta+1/2}}\cdot\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)d\phi$$

$$+O(n^{\alpha-1/2})\int_{\delta}^{\lambda-1/n}\frac{|F(\psi)|\,d\phi}{(\sin\psi/2^{\alpha+5/2}(\cos\phi/2)^{\beta+3/2}}$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{\delta}^{\lambda-1/n}|F(\cos\phi)-A|(\cos\phi/2)^{\beta-1/2}\cos\phi/2\,d\phi$$

$$+O(n^{\alpha/2})\int_{\delta}^{\lambda-1/n}|F(\cos\phi)-A|(\cos\phi/2)^{\beta-1/2}\,d\phi$$

$$I_3=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+O(n^{\alpha-1/2}) \tag{4.6}$$

अंत में I_4 का मान ज्ञात करेंगे।

$$I_4=\int_{\lambda-1/n}^{\lambda}F(\phi)\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\lambda_{n-k}P_{n-k}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{P_n}\sum_{j=0}^{n}\int_0^{1/n}|F(\lambda-\phi)|\lambda_{n-k}p_k P_{n-k}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1})\int_0^{1/n}|F(-\cos\phi)-A|\phi^{2\beta+1}\,d\phi$$

$I_4 = O(n^{\alpha-1/2})$

(प्रमेयिका 4) (4.7)

(4.3), (4.4), (4.6) और (4.7) को संयुक्त करने पर

$t_n(1) - f(1) = \max. \{0(n^{-(\alpha+1/2)(p-1)} + 0(n^{\alpha-1/2})\}$

प्रमेय कीउपपत्ति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका डॉ० बी० के० व्यौहार का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. चौधरी, आर० एस० Read. Acc. Naz. Lineei ser. 1972, **89**, 5[2], 644.52.

2. पाण्डे, जी० एस० तथा व्यौहार, बी० के०, On Norlund summability of Jacobi series. 1977

3. गुप्ता, डी० पी०, डी० एस० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1970

4. आब्रिकॉफ, एन०, Annuaire l'univ. Sofia, Faculte physico Mathematique, 1936, **1**, 89-133.

5. जेगो, जी०, Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc, Colleq. Publ., New York. 1959, पृष्ठ 167, 196

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 38, No. 4, 1995

कतिपय हाइपरज्यामितीय फलनों के सीमाओं के रूप में सार्वीकृत बहुपद सेट $\{(\phi^*_n(x, y, z)\}$ का निरूपण

राजेश कुमार तिवारी

डी० एन० कालेज, मशौढी, पटना

तथा

राम जी सिंह

पी० जी० सेन्टर महाराज कालज, आरा

[प्राप्त—मई 8, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य बहुपद सेट $\{(\phi_n^*(x, y, z)\}$ का कतिपय हाइपरज्यामितीय फलनों को 1 तथा 3 के सीमान्तों में निरूपण करना है। कतिपय उपयोगी परिणाम प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Representation of the generalised polynomial set $\{(\phi_n^*(x, y, z)\}$ as limits of certain Hypergeometric Function. *By* Rajesh Kumar Tiwary and Ramji Singh D. N. College, Mashaurhi (Patna), P. G. Centre Maharaja College, Arrah,

The present paper is aimed to present the polynomial set $\{\phi_n^* (x, y, z)\}$ defined by (1.2) 1 and 3 as limits of certain hypergeometric functions. Some useful results have been obtained. The particular choice of parameters yields several results involving classical polynomials are believed to be new.

प्रस्तावना

जब सिंह तथा तिवारी[1] के शोधपत्र के समीकरण (1.2) को थोडा सरल किया जाता है तो इ ससे निम्नलिखित की प्राप्ति होती है।

$$\phi_n^*(x,y,z)=R\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\frac{\Delta_u[e_1;-n]\ \Delta_u^3[e_1;1-(Q_7(i,j))-n]}{u!\ \Delta_u^1[e_1;1-(Q_1(i,j))-n]}$$

$$\times\frac{\Delta_u^4[e_6;1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5 v]\ [(Q_2(i,j))]_u\ [1-(Q_5(i,j))]_u}{\Delta_u^2[e_4;1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3 v]\ \Delta_u^5[e_4;(Q_{11}(i,j))-n+e_3 v]}$$

$$\times\frac{(-e_1)^{e_1 up'}\ (-e_4)^{-e_4 u\sum_{j=1}^{p}A'j/E_0}\ (-e_6)^{e_6 u\sum_{j=1}^{p}E'j/E'_o}}{\Delta_u^1[e_1;(Q_4(i,j))-n]\ [(Q_8(i,j))]_u}$$

$$\times\frac{(E_2\,y^{b_2/E''_0}}{(E_1^{e_1}x^{b_1(e_1/E'_0)})_u}\times$$

$$\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\frac{\Delta_w[c_4;-n+e_1u+e_2v]\ \Delta_w^3[c_4;1-(Q_7s(i;j))-n+e_1u+e_2v}{w!\ w^1\ c_4;1-(Q_1(i,j))-n+e_1u+e_2v}\times$$

$$\frac{\Delta_w^4[c_4;1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v+e_6u}{\Delta_w^2\ [c_4;1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v+e_4u]\ \Delta_w^5\ [c_4;(Q_{11}(i,j))}\times$$

$$\frac{(-c_4)^{c_4 w(P'-Q')}\ (c_1 z)^w}{-n+e_3v+e_4u]\ \Delta_w^6[c_4;(Q_4(i,j))-n+e_1u+e_2v]\ (E_1^{c_4 Xb_1 c_4/E'_0})}\times$$

$$F\left[\begin{array}{l}\Delta(e_2;-n+e_1u),\ \Delta^3(e_2;1-(Q_7(i,j))-n+e_1u),\\ \Delta^4(e_5;1-(Q_{12}(i,j))-n),\ (Q_3(i,j)),\ 1-(Q_6(i,j));\\ \Delta^1(e_2;1-(Q_1(i,j))-n+e_1u),\ \Delta^2(e_3;1-Q_{10}(i,j))-n,\\ \Delta^5(c_3;(Q_{11}(i,j)-n),\ \Delta^6(e_2;(Q_4(i,j))-n+e_1u),\ (Q_9(i,j));\\ \qquad(-e_2)^{e_2P''}\ L\end{array}\right] \tag{1.1}$$

मुख्य परिणाम

प्रमेय : व्यंजक (1.1) से प्राप्त होता है—

$$\phi^*_n(x, y, z) = \lim_{g \to x} \left\{ R \sum_{u=0}^{[n/e_1} \sum_{v=0}^{[n/e_2} R_1(u, v) \times \right.$$

$$F \left[\begin{array}{l} \Delta(c_4; -n+e_1 u+e_2 v),\ \Delta^3(c_4; 1-(Q_7(i, j))-n+e_1 u+e_2 v), \\ \Delta^4(c_4; 1-(Q_{12}(i, j))-n+e_5 v+e_6 u), \\ \Delta(h; 1+g+n); \\ \Delta^1(c_4; 1-(Q_1(i, j))-n+e_1 u+e_2 v), \\ \Delta^2(c_4; 1-(Q_{10}(i, j))-n+e_3 v+e_4 u), \\ \Delta^5(c_4; (Q_{11}(i, j))-n+e_3 v+e_4 u) \\ \Delta^6(c_4; (Q_4(i, j))-n+e_1 u+e_2 v); \\ \dfrac{(-c_4)^{c_4(P'-Q')}(c_1 z)(h)^h}{(E_1 x^{b_1/E'_0}) c_4\ g^h} \end{array} \right] \left. \right\} \quad (1.2)$$

उपपत्ति : (1.2) के दक्षिण पक्ष को B_3 से द्योतित करते हुए हम पाते हैं :

$$B_3 = \lim_{g \to \infty} R \sum_{u=0}^{[n/e_1]} \sum_{v=0}^{[n/c^2]} R_1(u, v) \sum_{w=0}^{[n/c_4]} \frac{\Delta_w[c_4; -n+e_1 u+e_2 v}{w!} \times$$

$$\frac{\overset{3}{\Delta}_w[c_4; 1-(Q_7(i, j))-n+e_1 u+e_2 v]\ \overset{4}{\Delta}_w[c_4; 1-(Q_{12}(i, j))}{\overset{1}{\Delta}_w[c_4; 1-(Q_1(i, j))-n+e_1 u+e_2 v]\ \overset{2}{\Delta}_w[c_4; 1-(Q_{10}(i, j))}$$

$$\frac{-n+e_5+e_6\,u]\;\Delta_w\,[h;\;1+g+n]\;(-c_4)^{\,c_4\,w(P'-Q')}}{-n+e_3\,v+e_4\,u]\;\Delta_w{}^5\,[c_4;\,(Q_{11}\,(i,j))-n+e_3\,v+e_4\,u]}$$

$$\times\frac{(c_1\,z)^w}{\Delta_w^6\,[c_4;\,(Q_4\,(i,j))-n+e_1\,u+e_2\,v]\;(E_1x^{b_1/E'_0})^{c_4w}\;g^{hw}}$$

$$=R\sum_{u=0}^{[n/e_1}\;\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\;\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\frac{\Delta_u\,[e_1;-n]\;\Delta_u{}^3\,[e_1;\,1-(Q_7\,(i,j))-n]}{u!\,v!\,w!\;\Delta_u{}^1\,[e_1;\,1-(Q_1\,(i,j))-n]}$$

$$\times\frac{\Delta_u{}^4\,[e_6;\,1-(Q_{12}\,(i,j))-n+e_5\,v]\;\Delta_v\,[e_2;-n+e_1\,u]}{\Delta_u{}^2\,[e_4;\,1-(Q_{10}\,(i,j))-n+e_3\,v]\;\Delta_u{}^5\,[e_4;\,(Q_{11}\,(i,j))-n+e_3\,v]}$$

$$\times\frac{\Delta_w{}^3\,[c_4;\,1-Q_7\,(i,j))-n+e_1\,u+e_2\,v]\;\Delta_w{}^4\,[c_4;\,1-(Q_{12}\,(i,j))}{\Delta_u{}^6\,[e_1;\,(Q_4\,(i,j))-n]\;[(Q_8\,(t,j))]_u\cdot\Delta_v{}^1\,[e_2;\,1-(Q_1\,(i,j))}$$

$$\times\frac{-n+e_5\,v+e_6\,u]\;[(Q_2\,(i,j))]_u\,[1-(Q_5\,(i,j))]_u}{-n+e_1\,u]\;\;\Delta_v{}^2\,[e_3;\,1-(Q_{10}\,(i,j))-n]\;\Delta_v{}^5\,[e_3;\,(Q_{11}\,(i,j))-n]}$$

$$\times\frac{\Delta_v{}^3\,[e_2;\,1-(Q_7\,(i,j))+n+e_1\,u]\;\Delta_v{}^4\,[e_5;\,1-(Q_{12}\,(i,j))-n]}{\Delta_v{}^6\,[e_2;\,(Q_4\,(i,j))-n+e_1\,u]\;[(Q_9\,(i,j))]_v}$$

$$\times\frac{\Delta_w[\;_4;-n+e_1\,u+e_2\,v]\;[(Q_3\,(i,j))]_v\,[1-(Q_6\,(i,j))]_v}{\Delta_w{}^1\,[c_4;\,1-(Q_1\,(i,j))-n+e_1\,u+e_2\,v]\;\Delta_w{}^2\,[c_4;\,1-(Q_{10}\,(i,j))}$$

$$\times\frac{(-e_1)^{\,e_1\,u(P'')}\,(-e_2)^{\,e_2\,v(P'')}\,(c_1\,z)^w\,(L)^v\,(L_1)^u}{-n+e_3\,v+e_4\,u]\;\Delta_w{}^5\,[c_4;\,(Q_{11}\,(i,j))-n+e_2\,v+e_4\,v}$$

$$\times\frac{(-c_4)^{\,c_4\,w(P'-Q')}}{\Delta_w{}^6\,[c_4;\,(Q_4\,(t,j))-n+e_1\,u+e_2\,v]\;(E_1{}^{c_4}\,e^{\,b_1\,(c_4/E'_0)}}$$

$$\lim_{g\to\infty}(1+\frac{1+n}{g})\,(1+\frac{2+n}{g})\;\ldots\;(1+\frac{hw+n}{g}$$

जो (1.2) का वाम पक्ष है

अतः सिद्ध हुआ।

(1.2) की विशष्ट दशाएँ

(i) $$L_n^{(\lambda)}(x)=\lim_{g\to\infty}\left\{\frac{(-x)^n}{n!}\;F\left[\begin{matrix}-n,\ -\lambda-n,\ \Delta(h;\ 1+g+n);\\ -(b/g)^h\ 1/x\\ \text{------}:\end{matrix}\right]\right\}$$

(ii) $$H_{2n}(x)=\lim_{g\to\infty}\left\{\frac{x^{2n}}{n!}F\left[\begin{matrix}-n,\ \tfrac{1}{2}-n,\ \Delta(h;\ 1+g+n);\\ -(h/g)^h\ 1/x^2\\ \text{------};\end{matrix}\right]\right\}$$

(iii) $$\overline{A_n}(v_x)=\lim_{g\to\infty}\overline{F}\left\{\frac{(v_x)^n}{n!}F\left[\begin{matrix}\Delta[m:-n],\ (a_p),\ \Delta(h;\ 1+g+n);\\ \frac{\mu_{(-m)}{}^m}{(v_x)^m}(h/g)^h\\ (b_q);\end{matrix}\right]\right\}$$

संकेतन

$$R_1(u, v)=\frac{\Delta_u[e_1;-n]\ \Delta_u{}^3[e_1;\ 1-(Q_7(i, j))-n]}{u!\ \Delta_u{}^1[e_1;\ 1-(Q_1\ i, j))-n]\Delta_u{}^2[e_4;\ 1-(Q_{10}(i, j))-n+e_3}$$

$$\times\frac{[1-(Q_5(i,j))]_u\ \Delta_u{}^4[e_6;\ 1-(Q_{12}(i, j))-n+e_5 v]\ \Delta_v[e_2;-n+e_1 u]}{\Delta_u{}^5[e_4;(Q_{11}(i, j))-n+e_3 v]\ \Delta_u{}^6[e_1;(Q_4(i, j))-n]\ [(Q_8(i, j))]_u}$$

$$\times\frac{[1-(Q_1(i,j))]_v\ \Delta_v{}^3[e_2;\ 1-(Q_7(i, j))-n+e_1 u]\ \Delta_v{}^4[e_5;\ 1-(Q_{12}(i, j))-}{v!\ \Delta_v{}^1[e_2;\ 1-(Q_1(i, j))-n+e_1 u]\ \Delta_v{}^2[e_3;\ 1-(Q_{10}(i, j))-n]}$$

$$\times\frac{[(Q_3(i, j))]_v\ (-e_1)^{uP''}\ (-e_2)^{e_2 v P''}\ (-e_6)^{e_6 u\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0}}{\Delta_v{}^5[e_3;(Q_{11}(i, j))-n]\ \Delta_v{}^6[e_2;(i, j))-n+e_1 u]\ [(Q_9(i, j))]_v}$$

$$\times\frac{(-e_5)^{e_5 v\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0}\ (E_2 Y^{b_2/E''_0 u})\ (E_3 Z^{b_3 1/E''_0 v})}{(-e_4^{e_4 u\sum_{j=1}^{q} A'j/E'_0}\ (E_1 x^{e_1}{}^{e_1/E'_0 u})\ (-e_3)^{e_3 v\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0}\ (E_1 x^{e_2}{}^{b_1 e_2/E'_0})^v}$$

$$[(Q_1\ (i,j))]=\prod_{j=1}^{n'}\ \prod_{i=1}^{D'j/E'_0}\left(\frac{1-d_j}{D'j/E'_0}+e'_0\right)$$

$$[1-(Q_4\ (i,j))]=\prod_{j=n'+1}^{p'}\ \prod_{i=1}^{D'j/E'_0}\left(1-\left(\frac{i-1+d'_j}{D'j/E'_0}\right)\right)$$

$$[(Q_7\ (i,j))]=\prod_{j=1}^{q'}\ \prod_{I=1}^{E'j/E'_0}\left(\frac{i-e'_j}{E'j/E'_0}+e'_0\right)$$

$$[(Q_{10}\ (i,j))]=\prod_{j=1}^{N}\ \prod_{i=1}^{A'j/E'_0}\left(\frac{i-e_j+A'j/E'_0\,e'_0+A''j/E''_0\,e''_0+A'''j/E'''_0}{A'j/E'_0}\right)$$

$$[1-(Q_{11}\ (i,j))]=\prod_{j=N+1}^{p}\ \prod_{i=1}^{A'j/E'_0}\left(1-\frac{i+a_j-1-A'j/E'_0\,e'_0-A''j/E''_0\,e''_0-A'''j/E'''_0\,e'''_0}{A'j/E'_0}\right)$$

निर्देश

1. सिंह, आर० तथा तिवारी, आर० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1994, **37**, (4) 235-246.
2. रेनविले, ई० डी०, Special Function, 1960.
3. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1985, **28** (4), 361-377.
4. सिंह, आर० तथा तिवारी, आर० के०, Mendal, 1990, **7** (3-4), 431-433.
5. तिवारी, आर० के० तथा सिंह, आर०, The Mathematics Education 1994, xxvii, (3), 130-134.
6. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 395-429.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंगेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहि अंगेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद